

chalumeau, «leur souffle lon au cul, et à force de leur souffler lon leur inspire vie». Ils sont ainsi assurés de vivre éternellement.

Il s'agit là de quelques exemples parmi d'autres, tous mettant en scène une résurrection comique ou située dans un autre monde, au-delà des mers – comme celle d'un chien à Lagado sous les yeux de Gulliver. Cette récurrence nous invite à voir ce motif non pas comme l'invention d'un auteur, mais comme un trait culturel plus vaste. Dans cet esprit, les rites du carnaval lui-même nous offrent un indice crucial. Pendant le carnaval ou lors des mariages, il arrive que l'on joue une danse comique dite «du barbier». Un barbier armé d'un faux rasoir en bois tue accidentellement l'un de ses clients. Cherchant le moyen de le ressusciter, il finit par y parvenir en prenant un tuyau... et en lui soufflant au cul.

LA DANSE DU BARBIER ET LE CONTE DE JEAN CORNECUL

La ressemblance de la pantomime avec la pratique de réanimation est frappante, mais l'existence d'un tel rite n'est réellement précieuse que s'il est possible de le situer avant la méthode réanimatoire, et indépendamment d'elle. C'est heureusement ce que nous permet de faire la présence, à l'identique, de cette danse du barbier dans des zones très reculées, enclavées et éloignées les unes des autres en Europe. On la découvre ainsi à la fois en Kachoubie (la Suisse polonaise, comme on l'appelle là-bas, une petite région montagneuse émaillée de lacs, avec son propre dialecte et une très forte autonomie culturelle) et dans le Pays basque espagnol. Ces deux entités séparées d'un millier de kilomètres, n'ayant *a priori* aucune connexion linguistique ou culturelle, connaissent donc exactement le même rite, sous le même nom.

Cette remarquable identité atteste bien l'existence d'un motif culturel très ancien et répandu, relevant du carnaval et liant la geste que nous poursuivons à une symbolique explicite de résurrection. Cette dimension est confirmée par un conte particulier (connu aussi dans plusieurs régions d'Europe) mettant en scène le personnage de «Jean Cornecul», un paysan malicieux qui trompe un riche adversaire, notamment en lui vendant un soufflet ou une corne qui aurait le pouvoir de ressusciter les morts – à ce stade, il n'est pas nécessaire de décrire comment.

La médecine du XVIII^e siècle aurait-elle donc pu, sans s'en rendre compte, réadapter un geste du carnaval? La chose est d'autant plus probable que cette enquête apporte un éclairage inattendu sur les autres étrangetés du discours sur la réanimation. L'usage de l'urine ou du fumier se retrouve aussi dans le carnaval. De même, les cigognes hibernant sous l'eau sont un motif apparenté à la culbute du carnaval, qui fait passer de l'hiver au printemps. Mieux: cet angle rend

compte de l'incohérence que représentait le récit sur les Amérindiens. Dans la région francophone d'où il provient, nous savons que le conte de Jean Cornecul était présent, de même que la danse du barbier – aussi appelée «danse du sauvage», et dans laquelle un personnage déguisé en Indien joue le rôle de la victime ou du réanimateur. De toute évidence, le témoignage de Diereville relevait d'une culture orale d'origine européenne. Tout ce qui semblait incohérent dans le discours scientifique du XVIII^e siècle se révèle ainsi fermement cohérent – mais à un niveau symbolique.

Il ne s'agit ici que d'un aperçu des rencontres qui ont étayé mon enquête, mais il illustre comment, pour développer la réanimation, les savants des Lumières ont puisé l'inspiration hors de la science, dans des traditions orales. Pour inventer quelque chose de nouveau, pour repousser les limites du pensable, le concours du culturel était ici nécessaire – une déclinaison de ce que Paul Feyerabend a nommé la «contre-induction». Selon l'épistémologue autrichien, la science ne peut avancer qu'en adoptant des pré-supposés gratuits allant à l'encontre des conceptions dominantes ou de l'observation directe. Cela entraîne l'expérimentation dans des directions pas forcément plus vraies, mais encore inexplorées. En donnant à la réanimation sa pratique phare au XVIII^e siècle, les représentations carnavalesques ont *de facto* joué ce rôle.

On pourrait tirer la conclusion rassurante qu'il s'agit là d'une spécificité du XVIII^e siècle, située entre la médecine clinique rationnelle et l'héritage médiéval. C'est une possibilité. Mais ce n'est ni la seule ni peut-être forcément la plus enrichissante. S'agit-il d'un phénomène unique et spécifique, ou bien d'un cas où ce lien entre science et culture nous est simplement plus visible? Pas plus qu'hier, les idées d'aujourd'hui ne naissent à partir de rien. ■

LES PREMIÈRES PRATIQUES DE RÉANIMATION DES NOYÉS

Déshabiller le noyé

Le couvrir d'une chemise, parfois également d'un bonnet

Le rouler sur (ou dans) un tonneau

Frotter ses membres avec des linges

Lui faire avaler de l'urine chaude ou de l'alcool

Le recouvrir de cendres ou de fumier (sauf la tête)

L'envelopper dans une peau de mouton fraîchement écorché

L'allonger dans un lit entre deux personnes nues

Le saigner (préférentiellement à la jugulaire)

Stimuler ses narines (sternutatoires / plume)

Souffler fort dans sa bouche

Souffler fort dans ses poumons via une trachéotomie

Insufflation alvine de fumée de tabac

BIBLIOGRAPHIE

A. Serdeczny, **Du tabac pour le mort. Une histoire de la réanimation**, Champ Vallon, 2018.

M. Vovelle, **La mort et l'Occident de 1300 à nos jours**, Gallimard, 2000.

C. Milanesi, **Mort apparente, mort imparfaite. Médecine et mentalités au XVIII^e siècle**, Payot, 1991.

P. Feyerabend, **Contre la méthode**, Seuil, 1979.

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art et science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

FAUT-IL ADOPTER L'AVIS DE SES VOISINS ?

La modélisation de réseaux d'individus dont l'opinion se conforme à celle de la majorité de leurs relations montre des évolutions parfois inattendues où, par exemple, le réseau se met à osciller entre deux états contradictoires.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Dans une communauté ayant une décision à prendre, par exemple quant à la construction d'un pont, un vote doit avoir lieu. Les électeurs sont conciliants : chacun a un avis, OUI ou NON, mais il est prêt à y renoncer si, parmi ses connaissances, plus de la moitié des avis sont contraires au sien. Pendant plusieurs jours, après un tour initial, chacun des électeurs consulte toutes ses connaissances et change d'avis le lendemain sur la construction du pont pour s'ajuster à l'avis majoritaire de ses connaissances consultées la veille. En cas d'égalité entre les pour et les contre parmi ses voisins, l'électeur garde le même avis pour le lendemain. Que va-t-il se passer ?

Ce problème en apparence élémentaire des « dynamiques majoritaires » agite les mathématiciens depuis bientôt 40 ans. Ils en ont découvert une multitude de propriétés inattendues. Le premier résultat important à son sujet a été démontré en 1980 par mon ami Eric Goles, alors doctorant à l'université de Grenoble et aujourd'hui à l'université Adolfo Ibáñez, à Santiago du Chili, et Jorge Olivos, de l'université du Chili : cette dynamique conduit soit à une stabilisation des opinions des électeurs, soit à une oscillation des opinions entre deux configurations C et C' : la configuration C donne le lendemain C' et C' donne le lendemain C. Aucune autre situation (oscillation entre trois états ou plus, désordre prolongé...) n'est possible.

La modélisation du problème se fait avec un graphe dont les nœuds sont les membres de la

communauté concernée, et dont les arêtes (non orientées) indiquent qui se connaît : on place une arête entre A et B si A et B se connaissent et donc s'influencent peut-être d'un jour à l'autre.

Le « théorème de la période 1 ou 2 » de Goles et Olivos stipule que, quelle que soit la répartition initiale des avis sur le graphe, l'application de la dynamique majoritaire conduit, en un nombre fini d'étapes, à une stabilisation complète des avis, ou à une double configuration des avis, chacune produisant l'autre.

Comme on le voit dans l'encadré ci-contre, si l'on part d'une configuration où le OUI l'emporte, le système se stabilise dans certains cas comme on l'attend en adoptant une configuration où le OUI reste majoritaire. Parfois cependant, la stabilisation se produit en adoptant une configuration où le NON l'emporte. Une troisième possibilité est prévue par le théorème de Goles et Olivos : le système se met à osciller entre deux états E et F. Il se peut même (voir l'encadré 1, A3 et B3) que pour E le OUI soit majoritaire et que pour F le NON soit majoritaire.

L'application de la dynamique majoritaire n'est donc pas le meilleur moyen d'arriver à un accord unanime, ou même seulement à un choix satisfaisant. Cependant, ce type d'évolution d'un graphe est très naturel et se rencontre dans plusieurs domaines scientifiques : réseaux d'automates finis, systèmes de votes, immunologie, interactions de cellules, réseaux de neurones, reconnaissance de formes, thermodynamique, etc. Le livre d'Eric Goles et Servet Martínez, *Neural and Automata Networks – Dynamical Behavior and Applications* >

LE THÉORÈME DE LA PÉRIODE 1 OU 2

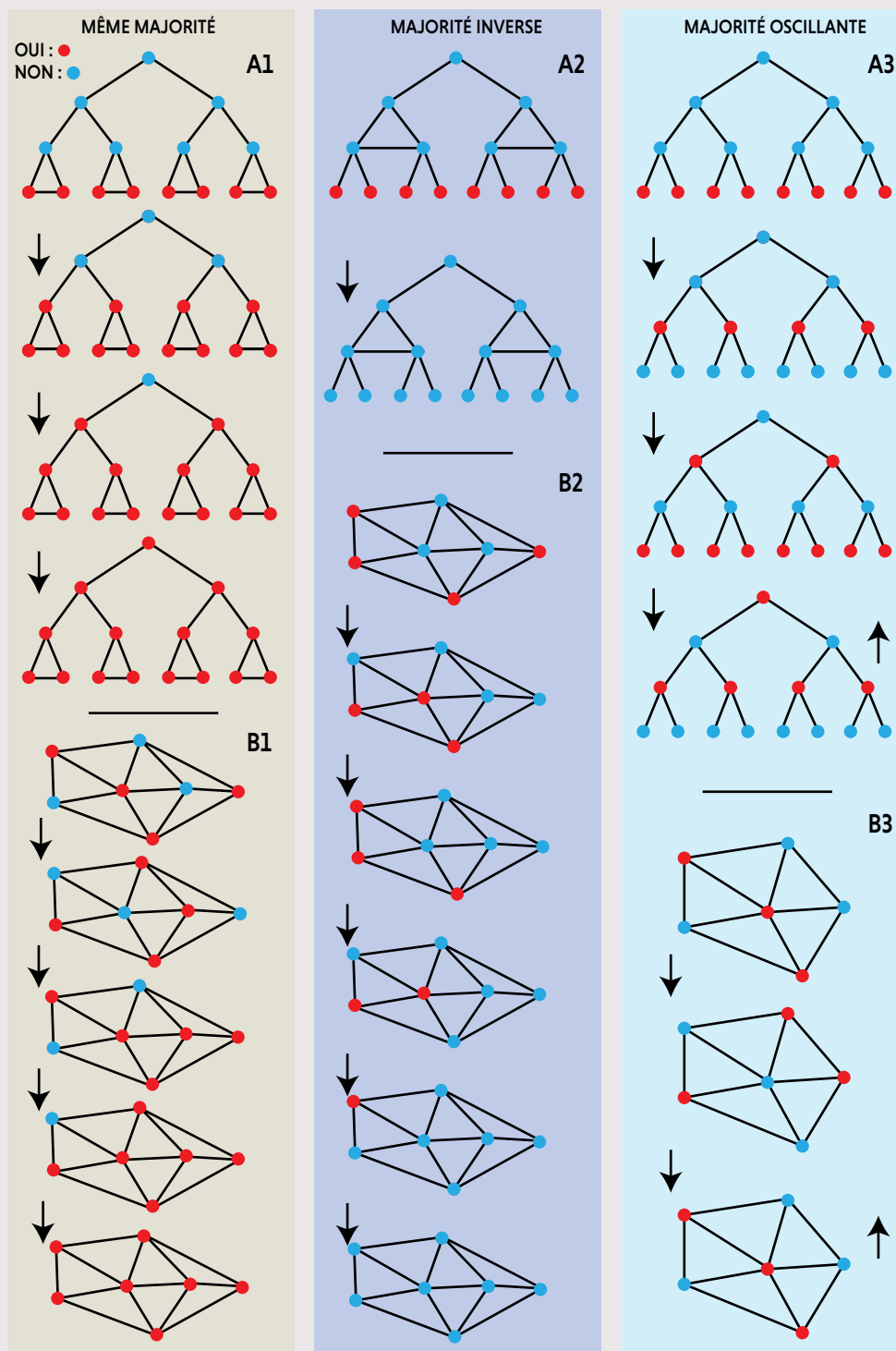
1

Adopter l'avis majoritaire (« oui » ou « non ») de ses voisins pour les nœuds d'un graphe définit un mode d'évolution des opinions. Selon le graphe et selon l'état des opinions de chaque nœud, cette évolution dure plus ou moins longtemps avant soit de se stabiliser, soit d'osciller entre deux configurations.

Les dessins A1 et B1 illustrent le cas où la dynamique majoritaire conduit à un état stable avec la même majorité qu'au départ. Dans les dessins A2 et B2, le graphe d'opinions se stabilise dans une configuration dont la majorité est inverse de celle de départ. Les dessins A3 et B3 montrent la troisième possibilité :

le graphe finit par osciller entre deux configurations.

Le théorème de Goles et Olivos, ou théorème de la période 1 ou 2, indique que des cycles entre plus de deux états sont impossibles : une dynamique majoritaire sur un graphe conduit soit à une stabilisation, soit à un cycle binaire.



> (Springer, 1990), décrit certaines de ces applications.

Depuis la découverte et la publication de ce théorème de la «période 1 ou 2» (dont nous donnerons une brève démonstration à la fin de l'article), une multitude de compléments et de généralisations ont été proposés. L'article de Goles et Olivos fait partie de ces articles scientifiques qui surprennent tout le monde, concernent plusieurs disciplines et ont, par conséquent, une importante descendance. Il a été cité plus de 90 fois dans des publications parues depuis et suscite encore aujourd'hui des recherches visant à améliorer la compréhension de ces dynamiques et des modèles similaires.

Récemment, John Haslegrave, de l'université de Warwick, et Chris Cunnings, de l'université de Sheffield, ont étudié et démontré une série de résultats nouveaux sur un modèle de dynamique tout proche qui semblait pourtant sans espoir.

Dans leur modèle, l'un des nœuds du réseau joue un rôle «d'original indiscipliné»: contrairement aux autres nœuds du réseau, il applique une règle de changement d'avis, indifférente au principe d'ajustement à la majorité des voisins. Avec un tel nœud non conformiste, le théorème de la période 1 ou 2 est faux: des périodes autres que 1 et 2 deviennent possibles.

Avant de présenter ces résultats nouveaux, évoquons l'importante et subtile question des réseaux infinis soumis au jeu de la dynamique majoritaire.

LES RÉSEAUX INFINIS DÉROGENT À LA RÈGLE

Sans le mentionner explicitement, nous avons supposé que le réseau décrivant le graphe des voisins était fini. Cette finitude a pour conséquence que le comportement du réseau devient inévitablement périodique. En effet, puisque le

2

SUR DES GRAPHES INFINIS

Dans le cas d'un graphe infini, les dynamiques majoritaires ne conduisent pas nécessairement à une stabilisation des opinions ou à un cycle binaire. Voici un exemple où le graphe tombe dans un cycle de longueur 3. On considère l'arbre binaire infini ci-dessous où, à chaque niveau, toutes les opinions des nœuds sont identiques. Pour le niveau 0, le nœud choisit OUI; les deux nœuds du niveau 1 choisissent NON; les nœuds du niveau 2 choisissent NON; les 8 nœuds du niveau 3 choisissent OUI. Ensuite, par niveau, on a: NON, NON, OUI, NON, NON, OUI, NON, NON, OUI, etc. (les nœuds de niveau multiple de 3 choisissent OUI, les autres choisissent NON).

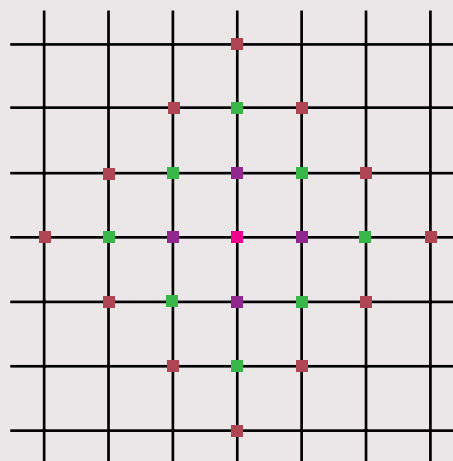
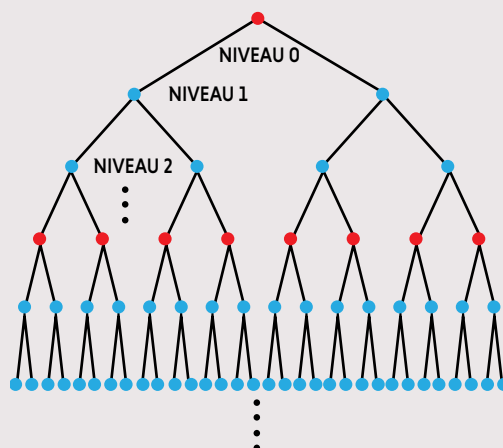
Que se passe-t-il entre l'instant 0 et l'instant 1 quand on applique la dynamique majoritaire? Chaque niveau impose son avis au niveau au-dessus: toutes les opinions montent d'un niveau. Il se produit la même chose entre l'instant 1 et l'instant 2 etc. La configuration des avis monte donc d'un niveau à chaque fois. Chaque nœud évolue donc avec une période 3.

Pour tout entier $k > 2$, en utilisant le même principe, on obtient une configuration initiale qui évolue avec une période k . Toutes les périodes sont donc possibles pour un réseau infini.

Toujours en utilisant le même principe (les nœuds d'un niveau sont tous en accord), on fixe la configuration des avis initiaux par niveau selon la séquence: OUI, NON, OUI, NON, NON, OUI, NON, NON, NON, OUI, NON... (des séquences de NON de plus en plus longues). Comme précédemment, tous les votes montent d'un niveau à chaque étape, et on a donc une évolution infinie non périodique.

Plutôt que de fixer l'état initial du réseau pour que son nœud le plus haut donne la suite 01011011101111 (en interprétant les OUI comme des zéros, et les NON comme des 1), on peut lui faire produire les chiffres de n'importe quel nombre écrit en binaire, par exemple π .

Le second dessin représente en couleur les 25 nœuds d'un réseau infini qui sont à une distance inférieure ou égale à 3 arêtes du nœud central. On montre que le nombre de nœuds à une distance inférieure ou égale à n du nœud central est $(n+1)^2 + n^2$. La croissance relativement modérée de ce nombre quand n augmente permet d'établir que sur le graphe infini en forme de quadrillage, le théorème de Goles et Olivos est vrai: la dynamique majoritaire aboutit en chaque nœud à une stabilisation ou à un cycle binaire.



réseau ne peut avoir qu'un nombre fini d'états, 2^n s'il y a n nœuds, et que le passage d'un état à un autre est déterministe, le réseau revient obligatoirement à un état qu'il a déjà occupé (finitude), et une fois revenu à un tel état antérieur recommence comme la première fois (déterminisme). L'évolution du réseau vers un fonctionnement périodique n'est pas surprenante; ce qui l'est, selon le théorème de Goles et Olivos, c'est que la période ne peut être que 1 ou 2.

Considérer un réseau s'étendant sur tout le plan ou sur tout l'espace n'est pas absurde, et c'est d'ailleurs ce que l'on fait quand on étudie les automates cellulaires comme celui du *jeu de la vie* de John Conway. Se pose donc la question de savoir si le théorème de la période 1 ou 2 s'étend à un réseau infini.

La réponse a donné lieu à plusieurs travaux de recherche. Elle est négative si l'on n'impose aucune restriction au réseau. L'encadré 2 montre en détail pourquoi, sur un simple graphe en forme d'arbre binaire infini, n'importe quelle période peut survenir en appliquant la dynamique majoritaire. Des comportements totalement désordonnés pour un nœud sont même à craindre. On peut par exemple déposer sur le réseau une configuration initiale de OUI et de NON qui fera que le nœud central (en haut de l'arbre) donnera d'instant en instant les chiffres binaires du nombre π (OUI=0, NON=1): $\pi=11,00100100001111101101010100010...$

Cependant, on observe expérimentalement que pour le réseau régulier dessiné par un quadrillage infini, où chaque nœud est lié à 4 voisins, le théorème de la période 1 ou 2 reste vrai. Quel que soit l'état initial des OUI et des NON posés sur les nœuds de ce réseau infini de carrés, chacun d'eux finira par atteindre un état qu'il ne quittera plus ou bien finira par osciller passant de OUI à NON et de NON à OUI indéfiniment.

Pour séparer les réseaux infinis permettant la généralisation du théorème de la période 1 ou 2 de ceux qui ne la vérifient pas, on considère des graphes infinis dont chaque nœud possède un nombre relativement réduit de liens avec ses voisins. L'énoncé découvert en 1995 par Gadi Moran, de l'université de Haïfa, en Israël, puis généralisé en 2000 par Yuval Ginosar, de l'université de Haïfa, et Ron Holzman, du Technion, à Haïfa également, est assez compliqué, mais nous allons voir qu'il s'applique facilement.

On formule la bonne condition sur le graphe en deux parties :

(a) Il existe un nombre entier D tel qu'un nœud du graphe infini n'est jamais lié à plus de D voisins.

(b) Le nombre $nb(N, n)$ de nœuds du graphe qu'on peut atteindre à partir du nœud N en moins de n étapes (en suivant les nœuds du graphe) n'augmente pas trop rapidement >

3

AVEC UN NŒUD NON CONFORMISTE

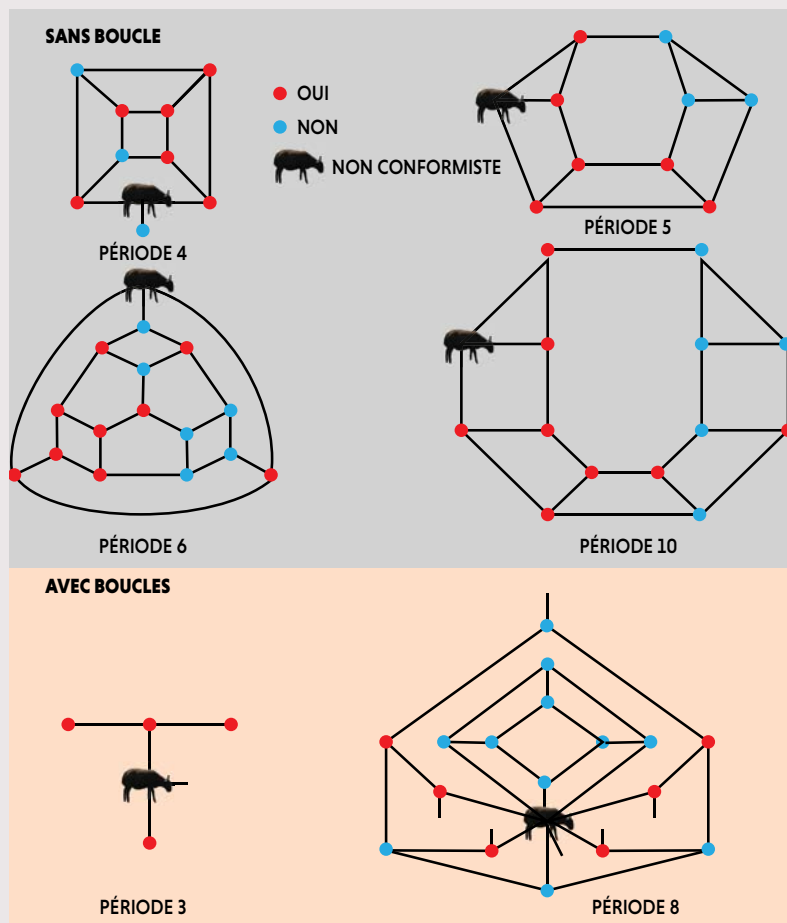
Que se passe-t-il quand un nœud du graphe ne suit pas la règle d'ajustement à la majorité de ses voisins ? L'étude a été menée par John Haslegrave et Chris Cannings (voir la bibliographie). Avec un nœud non conformiste, que l'on peut qualifier de « mouton noir », des cycles autres que 1 et 2 deviennent possibles, mais seulement pour un nombre limité d'entiers comme les résultats mentionnés dans le texte le précisent. En particulier, des cycles de longueur 4 peuvent se produire à cause d'un nœud non conformiste.

On distingue deux cas, selon qu'on autorise ou non un nœud à être relié à lui-même (boucle). Dans le premier cas (pas de boucle),

des cycles d'ordre 4, 5, 6 ou 10 sont possibles. Dans le second cas, peuvent survenir en plus des cycles d'ordre 3, 8 ou 12.

Les dessins ci-dessous représentent les configurations conduisant à certains de ces cycles. On a adopté les conventions de dessin suivantes :

- on représente le nœud non conformiste par un mouton noir, et dans tous les dessins on suppose qu'il utilise la règle antimajoritaire (il choisit à l'instant $t + 1$ le vote minoritaire de ses voisins à l'instant t).
- les nœuds qui bouclent sur eux-mêmes (ils se considèrent comme leur propre voisin) sont marqués par un trait.



RÉSEAUX DE NEURONES



4

Pour modéliser les réseaux de neurones, Warren McCulloch et Walter Pitts ont imaginé en 1943 un modèle où l'état du neurone change en fonction des influx reçus de ses voisins : le neurone évalue le cumul de ses influx et s'il dépasse un certain seuil, spécifique du neurone, lui-même émet un influx. Ce modèle et ses variantes sont devenus importants en intelligence artificielle.

Voici une version précise de ce modèle pour lequel le théorème de la période 1 ou 2 de Goles et Olivos est vrai. Les neurones ou nœuds du graphe sont notés $N_1, N_2, \dots, N_k$. D'un instant à l'autre, le neurone N_i passe de l'état « non excité » (NON), dont la valeur est 0, à l'état « excité » (OUI), qui vaut 1, si la somme

des influx de ses voisins dépasse une valeur s_i appelée seuil d'excitation. Cette somme peut être pondérée par des coefficients a_{ij} à condition que les coefficients de pondération soient symétriques ($a_{ij} = a_{ji}$). La règle pour passer d'un état à l'autre est : L'état du nœud N_i est excité à l'étape $t+1$ si la somme des produits $a_{ij} \times$ (valeur du nœud N_j à l'étape t) pour tous les N_j auquel N_i est relié dépasse le seuil s_i de ce nœud. En choisissant bien les seuils s_i et en prenant les a_{ij} égaux à 1 ou 0 selon que N_i est lié à N_j ou non, on retrouve le modèle de la dynamique majoritaire. Le théorème de la période 1 ou 2 est vrai pour ce modèle neuronal.

> quand n augmente et vérifie précisément que : la suite $nb(N, n)^{1/n}$ est bornée, et la limite de toute suite extraite convergente est inférieure à $1+1/D^-$ où D^- est le plus grand nombre pair strictement inférieur à D .

Cela est un peu dur à avaler... tout n'est pas toujours aussi simple qu'on le souhaiterait ! Heureusement, l'application à des cas particuliers est facile.

Considérons le quadrillage du plan. On a $D=4$, $D^-=2$, $1+1/D^-=3/2$. Le nombre de nœuds à distance au plus n d'un nœud N est $(n+1)^2 + n^2$ (voir le dessin dans l'encadré 2). On vérifie que la suite numérique $nb(N, n)^{1/n} = ((n+1)^2 + n^2)^{1/n}$ a pour limite 1, ce qui est inférieur à $3/2$. La condition (b) est donc vérifiée. Pour le graphe planaire infini du quadrillage du plan, le théorème de la période 1 ou 2 est donc vrai.

Il en va de même pour le réseau de l'espace composé de cubes où chaque nœud est lié à six nœuds, et pour bien d'autres graphes infinis... mais pas pour l'arbre binaire infini !

QUAND UN NŒUD EST NON CONFORMISTE

Venons-en maintenant aux résultats les plus récents qui envisagent l'introduction d'une sorte de mouton noir ne se soumettant pas à la règle majoritaire.

Le modèle considéré est un peu plus général que celui décrit plus haut, ce qui renforce d'ailleurs l'intérêt des résultats récents. Nous noterons $N_1, N_2, \dots, N_k$ les nœuds du graphe. Le nœud N_i sera le nœud non conformiste.

Sa décision de choisir OUI ou NON pour le jour $t+1$ est fondée sur un mécanisme précis qui ne dépend que des choix faits par ses voisins le jour t . L'individu non conformiste N_i a retenu certaines configurations de ses voisins, par exemple {voisin 1, voisin 2} et {voisin 2, voisin 3, voisin 4}, et si chaque voisin de l'une de ces configurations a choisi NON le jour t , N_i choisira NON le jour $t+1$. Dans tous les autres cas, N_i choisit OUI le jour $t+1$.

Les autres nœuds adoptent un principe de seuil qui généralise l'idée du vote majoritaire : pour $i > 1$, un nœud N_i choisit NON le jour $t+1$ si le nombre de ses voisins qui ont choisi NON le jour t est supérieur ou égal à un nombre fixé s_i (s_i est le seuil qui lui fait choisir de voter NON). Le seuil s_i dépend du nœud N_i , mais une fois ces seuils fixés, ils ne changent plus.

L'idée de ce modèle est que certains membres de la communauté sont plus conciliants que d'autres et sont donc plus facilement prêts à choisir OUI. Si par exemple chaque nœud possède 10 voisins, certains ne se décideront à choisir NON pour le jour $t+1$ que lorsque plus de 9 voisins auront choisi NON le jour t , alors que d'autres opteront pour le NON dès que 6 voisins auront choisi NON le jour t ; d'autres, plus enclins encore à un vote négatif,

LIENS DE DÉSACCORD ET LIENS AIGRES

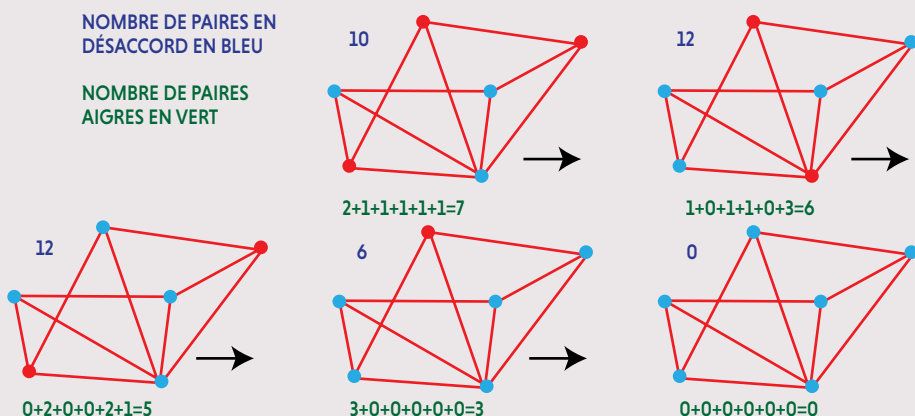
5

Dans la démonstration du théorème de Goles et Olivos donnée à la fin de l'article, on utilise la notion de paire de nœuds aigres : (N, N') est aigre si N à l'instant t ne choisit pas la même chose que N' à l'instant $t+1$. On démontre que le nombre de paires de nœuds aigres diminue nécessairement et finit par se stabiliser. Cela semble un peu

compliqué et on aurait aimé simplifier la démonstration en établissant que le nombre de paires de nœuds (N, N') en désaccord (N et N' choisissent différemment à l'instant t) diminue. Il se trouve que c'est faux : le nombre de paires de nœuds en désaccord augmente parfois quand on applique la dynamique majoritaire. Le dessin illustre une telle situation.

NOMBRE DE PAIRES EN DÉSACCORD EN BLEU

NOMBRE DE PAIRES AIGRES EN VERT



BIBLIOGRAPHIE

E. Cruciani et al., **Phase transition of the 2-choices dynamics on core-periphery networks**, prépublication arXiv:1804.07223, 2018.

J. Haslegrave et C. Cannings, **Majority dynamics with one nonconformist**, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 219, pp. 32-39, 2017.

I. Benjamini et al., **Convergence, unanimity and disagreement in majority dynamics on unimodular graphs and random graphs**, *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 126(9), pp. 2719-2733, 2016.

Y. Ginosar et R. Holzman, **The majority action on infinite graphs: strings and puppets**, *Discrete Mathematics*, vol. 215(1-3), pp. 59-71, 2000.

G. Moran, **On the period-two-property of the majority operator in infinite graphs**, *Transactions of the AMS*, vol. 347(5), pp. 1649-1667, 1995.

E. Goles et J. Olivos, **Comportement périodique des fonctions à seuil binaires et applications**, *Discrete Applied Math.*, vol. 3, pp. 93-105, 1981 ; **Periodic behaviour of generalized threshold functions**, *Discrete Mathematics*, vol. 30(2), pp. 187-189, 1980.

choisiront NON dès que deux de leurs voisins auront choisi NON le jour t .

Voici les théorèmes récents qui généralisent le théorème de la période 1 ou 2.

(A) Si l'on accepte que deux voisins de N_i soient eux-mêmes voisins (présence d'un triangle N_i, N_p, N_p), alors la présence d'un nœud non conformiste rend possible toute longueur de cycle. Pour avoir la période 3, il faut que N_i soit voisin de lui-même (boucle).

(B) Si deux voisins de N_i ne sont jamais voisins (pas de triangle N_i, N_p, N_p), et qu'un nœud n'est jamais considéré comme voisin de lui-même, alors, quelle que soit la règle appliquée par le nœud non conformiste N_i et quels que soient les seuils choisis par les autres nœuds, seuls des cycles de longueur 1, 2 ou 4 sont possibles.

(C) Sous les mêmes conditions, mais en acceptant maintenant qu'un nœud puisse être son propre voisin (boucle), les longueurs des cycles possibles sont tous les entiers de la liste 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12.

(D) Dans le cas où le nœud N_i suit une règle d'antimajorité, il choisit le jour $t+1$ ce qui était minoritaire chez ses voisins le jour t , et maintenant même si deux de ses voisins sont liés, les cycles possibles sont : 1, 2, 4, 5, 6 et 10 quand il n'y a pas de boucle.

(E) Il faut ajouter 3 et 8 si les boucles sont autorisées.

Les chercheurs ont par ailleurs établi que ces résultats sont les meilleurs possibles en montrant qu'en respectant les hypothèses des théorèmes, chacune des longueurs de cycles énumérées se produit réellement.

L'encadré 3 donne des exemples de ces extraordinaires situations où des longueurs de cycles autres que 1 et 2 se produisent.

COMMENT PROUVER CE GENRE DE CHOSES ?

À titre d'exemple, voici, pour les plus courageux, en évitant toute formule et en simplifiant au maximum, la démonstration de la forme envisagée au début de cet article du résultat de Goles et Olivos.

Contexte. On se donne un graphe fini indiquant les liens entre personnes d'une communauté. Chaque nœud du graphe a un avis OUI ou NON à l'instant t . De l'instant t à l'instant $t+1$, chaque nœud peut changer d'avis. Quand plus de la moitié de ses voisins sont d'avis contraire au sien, il prend alors l'avis de cette majorité de voisins. En cas d'égalité, il conserve son avis.

Affirmation. Au bout d'un certain temps, ce mécanisme conduit à une stabilisation de tous les avis, ou alors à une oscillation des avis entre deux états, autrement dit le graphe reprend le même état exactement au bout des deux étapes.

Démonstration. On dit qu'un couple de nœuds (N, N') est « aigre entre l'instant t et l'instant $t+1$ » si N et N' sont reliés et que N à l'instant t a un avis différent de N' à l'instant $t+1$ (attention: on ne considère pas le même instant pour N et N').

Montrons qu'il y a stabilité ou décroissance quand on passe du nombre de couples aigres entre $t-1$ et t au nombre de couples aigres entre t et $t+1$.

Considérons un nœud particulier N , fixé. Soit m le nombre de couples (N, N') aigres entre $t-1$ et t . Et soit n le nombre de couples (N', N) aigres entre t et $t+1$. Nous allons montrer que $m \geq n$.

Cas 1. Supposons que N ne change pas d'avis entre $t-1$ et $t+1$. Alors, nécessairement: $n=m$. En effet, si N a le même avis à l'instant $t-1$ et à l'instant $t+1$ (nous l'avons supposé) et si N' est lié à N , alors N à l'instant $t-1$ a un avis différent de N' à l'instant t si et seulement si N' à l'instant t a un avis différent de N à l'instant $t+1$.

Cas 2. Supposons que N change d'avis entre l'instant $t-1$ et l'instant $t+1$. Deux cas sont possibles.

(a) N a gardé le même avis entre $t-1$ et t , et a changé d'avis entre t et $t+1$. À l'instant t , N était donc entouré de plus de nœuds ayant un avis différent du sien que de nœuds ayant le même avis que le sien. Il y avait donc plus de la moitié des couples (N, N') liés qui étaient aigres entre l'instant $t-1$ et l'instant t et moins de la moitié des couples (N', N) qui étaient aigres entre t et $t+1$. C'est donc que $n < m$.

(b) N a changé d'avis entre $t-1$ et t , et l'a gardé entre t et $t+1$. Si N a gardé le même avis entre l'instant t et l'instant $t+1$, c'est qu'à l'instant t , il y avait plus de nœuds N' liés à N qui étaient de son avis (contraire à celui qu'il avait à l'instant $t-1$), disons k , que de nœuds voisins ayant un avis différent, disons h : $k > h$. On remarque alors que $m=k$ et $n=h$. On a donc $n < m$.

Si N change d'avis entre $t-1$ et $t+1$ on a donc toujours $n < m$. Le regroupement des cas 1 et 2 signifie que $n \leq m$.

Le nœud N était fixé. Faisons-le varier. On obtient que le nombre total de couples (N', N) aigres entre l'instant t et l'instant $t+1$ (c'est la somme des n associés à chaque nœud N) est inférieur ou égal au nombre total des couples (N, N') aigres entre l'instant $t-1$ et l'instant t (qui est la somme des m associés à chaque nœud N). Le nombre de couples aigres entre t et $t+1$ est donc inférieur ou égal au nombre de couples aigres entre $t-1$ et t . Dit autrement, le nombre de couples aigres décroît ou reste stable.

Ce nombre total ne peut décroître indéfiniment; arrive donc un moment où il se stabilise. Quand il est stabilisé, le cas 2 ne se produit plus, donc chaque nœud d'un instant $t-1$ à l'instant $t+1$ garde le même avis. CQFD. ■

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

L'ARAIGNÉE, UN GUIDE POUR L'HUMANITÉ

Au palais de Tokyo, à Paris, Tomás Saraceno installe ses œuvres, qui, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, entre art, science et architecture, nous obligent à repenser nos liens avec le monde. Les araignées y ont la part belle !

La Maman de Louise Bourgeois, l'Araignée Rouge d'Alexander Calder, La Princesse conçue par François Delarozière... En art (comme en science-fiction d'ailleurs), les araignées ont la fâcheuse tendance à être monumentales : chacune des œuvres citées ci-dessus fait plus de 10 mètres ! Ce n'est pas le cas avec l'artiste argentin Tomás Saraceno, à qui le palais de Tokyo, à Paris, offre carte blanche. Ses araignées sont d'une taille de l'ordre du centimètre. Et pour cause, ce sont des vraies !

Parmi les œuvres que propose l'exposition « On Air » (plus d'une quinzaine), les arachnides occupent une place de choix. Ainsi, *Event Horizon* donne à entendre les vibrations émises par *Holocnemus pluchei*, une araignée hôte des sous-sols du palais de Tokyo, à la toile de laquelle sont transmis, en direct, les signaux captés par l'antenne *Virgo* de l'observatoire gravitationnel européen. Cet animal très sensible serait-il capable de détecter les ondes gravitationnelles ? C'est le pari de l'artiste.

Webs of at-tent(s)ion rassemble, dans une grande salle obscure, 76 toiles d'araignées (voir la photographie ci-contre) de diverses espèces. Certaines sont reliées à des microphones qui amplifient et rendent audibles les vibrations qui les parcourent.

Dans *Sounding the Air*, cinq filaments de soie d'araignée flottent et résonnent dans l'air en fonction des mouvements invisibles de l'air provoqués par les

Une toile d'araignée ?
Plutôt une extension
de l'appareil sensoriel
de l'animal, par laquelle
son univers s'agrandit !

changements de température, le flux des visiteurs et leur respiration.

Un dernier ? Le film *Living at the Bottom of the Ocean of Air* montre une argyronète *Argyroneta aquatica*, une araignée qui vit sous l'eau, respirant grâce à une bulle d'air enveloppant son abdomen.

Pourquoi tant d'araignées ? Selon Tomás Saraceno, leurs toiles constituent certes leur habitat mais plus encore le prolongement de leur corps et particulièrement de leur appareil sensoriel. Les fils de soie deviennent ainsi pour l'arthropode des oreilles, des yeux... De même, l'art doit augmenter notre attention à ce qui se passe autour de nous, dans le monde en pleine

