

LE THÉORÈME DE LA PÉRIODE 1 OU 2

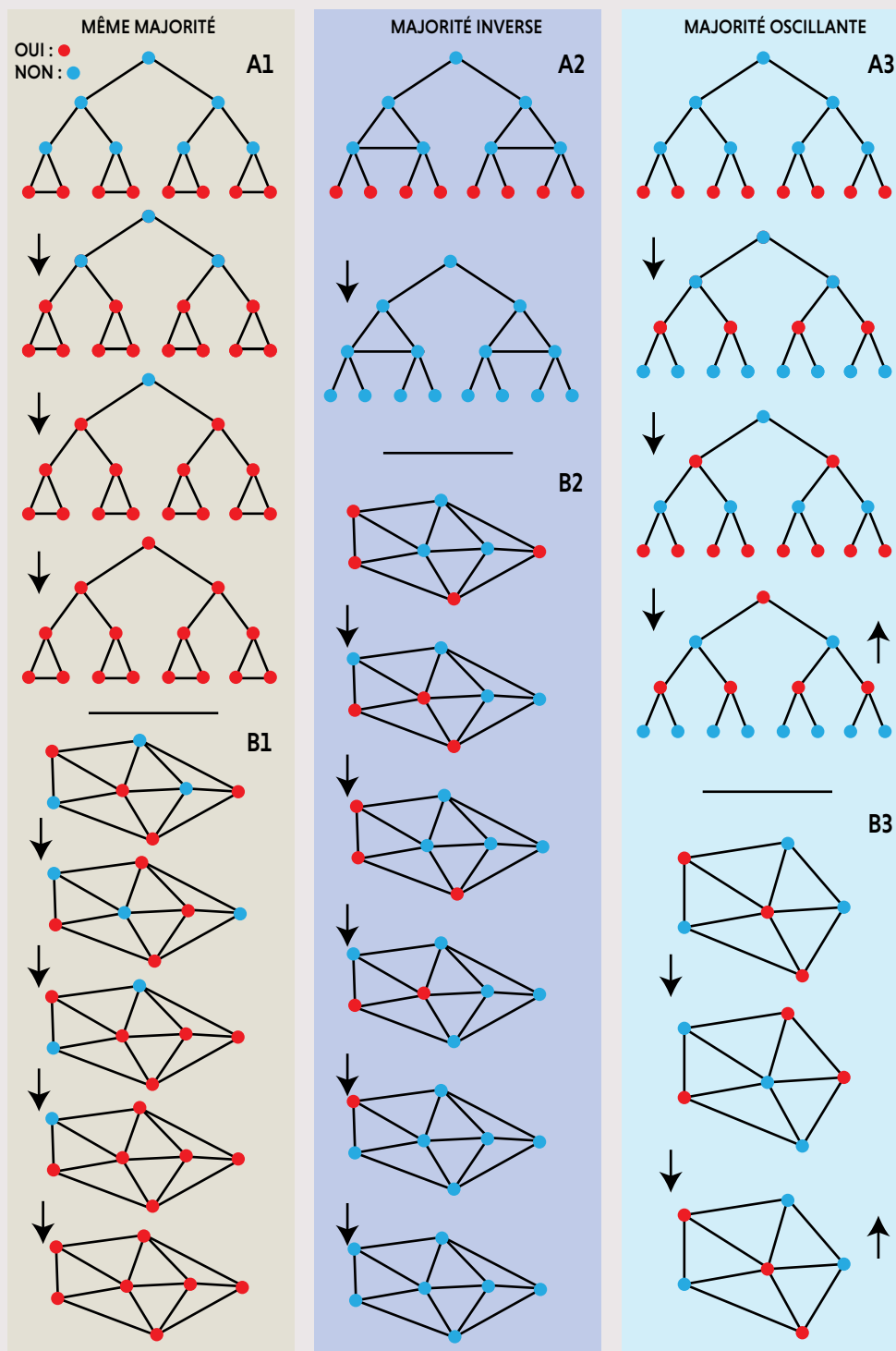
1

Adopter l'avis majoritaire (« oui » ou « non ») de ses voisins pour les nœuds d'un graphe définit un mode d'évolution des opinions. Selon le graphe et selon l'état des opinions de chaque nœud, cette évolution dure plus ou moins longtemps avant soit de se stabiliser, soit d'osciller entre deux configurations.

Les dessins A1 et B1 illustrent le cas où la dynamique majoritaire conduit à un état stable avec la même majorité qu'au départ. Dans les dessins A2 et B2, le graphe d'opinions se stabilise dans une configuration dont la majorité est inverse de celle de départ. Les dessins A3 et B3 montrent la troisième possibilité :

le graphe finit par osciller entre deux configurations.

Le théorème de Goles et Olivos, ou théorème de la période 1 ou 2, indique que des cycles entre plus de deux états sont impossibles : une dynamique majoritaire sur un graphe conduit soit à une stabilisation, soit à un cycle binaire.



> (Springer, 1990), décrit certaines de ces applications.

Depuis la découverte et la publication de ce théorème de la «période 1 ou 2» (dont nous donnerons une brève démonstration à la fin de l'article), une multitude de compléments et de généralisations ont été proposés. L'article de Goles et Olivos fait partie de ces articles scientifiques qui surprennent tout le monde, concernent plusieurs disciplines et ont, par conséquent, une importante descendance. Il a été cité plus de 90 fois dans des publications parues depuis et suscite encore aujourd'hui des recherches visant à améliorer la compréhension de ces dynamiques et des modèles similaires.

Récemment, John Haslegrave, de l'université de Warwick, et Chris Cunnings, de l'université de Sheffield, ont étudié et démontré une série de résultats nouveaux sur un modèle de dynamique tout proche qui semblait pourtant sans espoir.

Dans leur modèle, l'un des nœuds du réseau joue un rôle «d'original indiscipliné»: contrairement aux autres nœuds du réseau, il applique une règle de changement d'avis, indifférente au principe d'ajustement à la majorité des voisins. Avec un tel nœud non conformiste, le théorème de la période 1 ou 2 est faux: des périodes autres que 1 et 2 deviennent possibles.

Avant de présenter ces résultats nouveaux, évoquons l'importante et subtile question des réseaux infinis soumis au jeu de la dynamique majoritaire.

LES RÉSEAUX INFINIS DÉROGENT À LA RÈGLE

Sans le mentionner explicitement, nous avons supposé que le réseau décrivant le graphe des voisins était fini. Cette finitude a pour conséquence que le comportement du réseau devient inévitablement périodique. En effet, puisque le

2

SUR DES GRAPHES INFINIS

Dans le cas d'un graphe infini, les dynamiques majoritaires ne conduisent pas nécessairement à une stabilisation des opinions ou à un cycle binaire. Voici un exemple où le graphe tombe dans un cycle de longueur 3. On considère l'arbre binaire infini ci-dessous où, à chaque niveau, toutes les opinions des nœuds sont identiques. Pour le niveau 0, le nœud choisit OUI; les deux nœuds du niveau 1 choisissent NON; les nœuds du niveau 2 choisissent NON; les 8 nœuds du niveau 3 choisissent OUI. Ensuite, par niveau, on a: NON, NON, OUI, NON, NON, OUI, NON, NON, OUI, etc. (les nœuds de niveau multiple de 3 choisissent OUI, les autres choisissent NON).

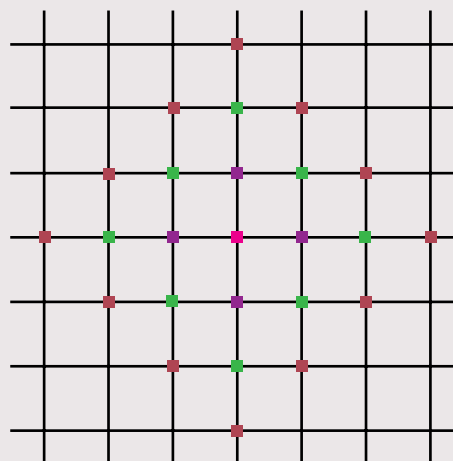
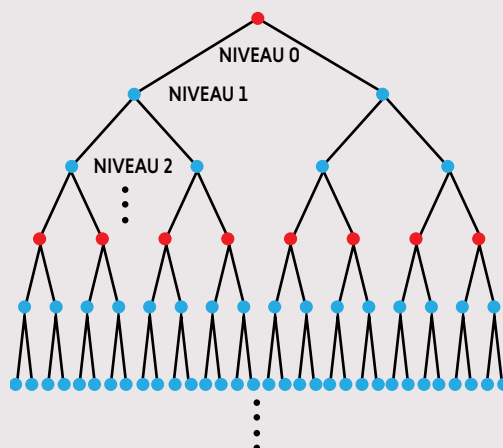
Que se passe-t-il entre l'instant 0 et l'instant 1 quand on applique la dynamique majoritaire? Chaque niveau impose son avis au niveau au-dessus: toutes les opinions montent d'un niveau. Il se produit la même chose entre l'instant 1 et l'instant 2 etc. La configuration des avis monte donc d'un niveau à chaque fois. Chaque nœud évolue donc avec une période 3.

Pour tout entier $k > 2$, en utilisant le même principe, on obtient une configuration initiale qui évolue avec une période k . Toutes les périodes sont donc possibles pour un réseau infini.

Toujours en utilisant le même principe (les nœuds d'un niveau sont tous en accord), on fixe la configuration des avis initiaux par niveau selon la séquence: OUI, NON, OUI, NON, NON, OUI, NON, NON, NON, OUI, NON... (des séquences de NON de plus en plus longues). Comme précédemment, tous les votes montent d'un niveau à chaque étape, et on a donc une évolution infinie non périodique.

Plutôt que de fixer l'état initial du réseau pour que son nœud le plus haut donne la suite 01011011101111 (en interprétant les OUI comme des zéros, et les NON comme des 1), on peut lui faire produire les chiffres de n'importe quel nombre écrit en binaire, par exemple π .

Le second dessin représente en couleur les 25 nœuds d'un réseau infini qui sont à une distance inférieure ou égale à 3 arêtes du nœud central. On montre que le nombre de nœuds à une distance inférieure ou égale à n du nœud central est $(n+1)^2 + n^2$. La croissance relativement modérée de ce nombre quand n augmente permet d'établir que sur le graphe infini en forme de quadrillage, le théorème de Goles et Olivos est vrai: la dynamique majoritaire aboutit en chaque nœud à une stabilisation ou à un cycle binaire.



réseau ne peut avoir qu'un nombre fini d'états, 2^n s'il y a n nœuds, et que le passage d'un état à un autre est déterministe, le réseau revient obligatoirement à un état qu'il a déjà occupé (finitude), et une fois revenu à un tel état antérieur recommence comme la première fois (déterminisme). L'évolution du réseau vers un fonctionnement périodique n'est pas surprenante; ce qui l'est, selon le théorème de Goles et Olivos, c'est que la période ne peut être que 1 ou 2.

Considérer un réseau s'étendant sur tout le plan ou sur tout l'espace n'est pas absurde, et c'est d'ailleurs ce que l'on fait quand on étudie les automates cellulaires comme celui du *jeu de la vie* de John Conway. Se pose donc la question de savoir si le théorème de la période 1 ou 2 s'étend à un réseau infini.

La réponse a donné lieu à plusieurs travaux de recherche. Elle est négative si l'on n'impose aucune restriction au réseau. L'encadré 2 montre en détail pourquoi, sur un simple graphe en forme d'arbre binaire infini, n'importe quelle période peut survenir en appliquant la dynamique majoritaire. Des comportements totalement désordonnés pour un nœud sont même à craindre. On peut par exemple déposer sur le réseau une configuration initiale de OUI et de NON qui fera que le nœud central (en haut de l'arbre) donnera d'instant en instant les chiffres binaires du nombre π (OUI=0, NON=1): $\pi=11,00100100001111101101010100010...$

Cependant, on observe expérimentalement que pour le réseau régulier dessiné par un quadrillage infini, où chaque nœud est lié à 4 voisins, le théorème de la période 1 ou 2 reste vrai. Quel que soit l'état initial des OUI et des NON posés sur les nœuds de ce réseau infini de carrés, chacun d'eux finira par atteindre un état qu'il ne quittera plus ou bien finira par osciller passant de OUI à NON et de NON à OUI indéfiniment.

Pour séparer les réseaux infinis permettant la généralisation du théorème de la période 1 ou 2 de ceux qui ne la vérifient pas, on considère des graphes infinis dont chaque nœud possède un nombre relativement réduit de liens avec ses voisins. L'énoncé découvert en 1995 par Gadi Moran, de l'université de Haïfa, en Israël, puis généralisé en 2000 par Yuval Ginosar, de l'université de Haïfa, et Ron Holzman, du Technion, à Haïfa également, est assez compliqué, mais nous allons voir qu'il s'applique facilement.

On formule la bonne condition sur le graphe en deux parties :

(a) Il existe un nombre entier D tel qu'un nœud du graphe infini n'est jamais lié à plus de D voisins.

(b) Le nombre $nb(N, n)$ de nœuds du graphe qu'on peut atteindre à partir du nœud N en moins de n étapes (en suivant les nœuds du graphe) n'augmente pas trop rapidement >

3

AVEC UN NŒUD NON CONFORMISTE

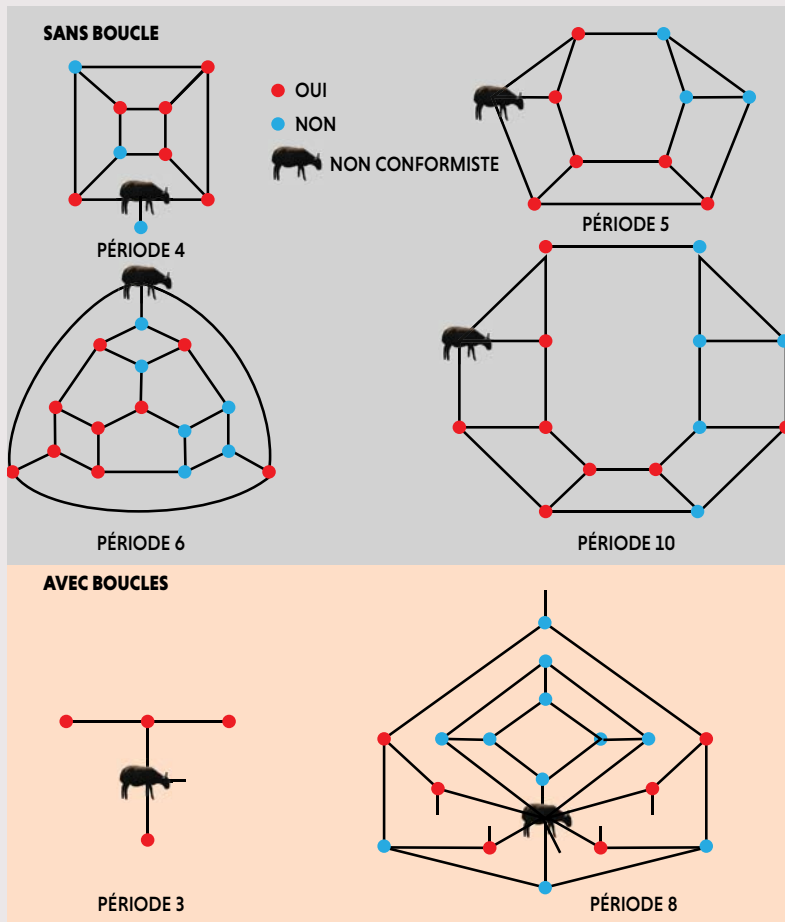
Que se passe-t-il quand un nœud du graphe ne suit pas la règle d'ajustement à la majorité de ses voisins ? L'étude a été menée par John Haslegrave et Chris Cannings (voir la bibliographie). Avec un nœud non conformiste, que l'on peut qualifier de « mouton noir », des cycles autres que 1 et 2 deviennent possibles, mais seulement pour un nombre limité d'entiers comme les résultats mentionnés dans le texte le précisent. En particulier, des cycles de longueur 4 peuvent se produire à cause d'un nœud non conformiste.

On distingue deux cas, selon qu'on autorise ou non un nœud à être relié à lui-même (boucle). Dans le premier cas (pas de boucle),

des cycles d'ordre 4, 5, 6 ou 10 sont possibles. Dans le second cas, peuvent survenir en plus des cycles d'ordre 3, 8 ou 12.

Les dessins ci-dessous représentent les configurations conduisant à certains de ces cycles. On a adopté les conventions de dessin suivantes :

- on représente le nœud non conformiste par un mouton noir, et dans tous les dessins on suppose qu'il utilise la règle antimajoritaire (il choisit à l'instant $t + 1$ le vote minoritaire de ses voisins à l'instant t).
- les nœuds qui bouclent sur eux-mêmes (ils se considèrent comme leur propre voisin) sont marqués par un trait.



RÉSEAUX DE NEURONES



4

Pour modéliser les réseaux de neurones, Warren McCulloch et Walter Pitts ont imaginé en 1943 un modèle où l'état du neurone change en fonction des influx reçus de ses voisins : le neurone évalue le cumul de ses influx et s'il dépasse un certain seuil, spécifique du neurone, lui-même émet un influx. Ce modèle et ses variantes sont devenus importants en intelligence artificielle.

Voici une version précise de ce modèle pour lequel le théorème de la période 1 ou 2 de Goles et Olivos est vrai. Les neurones ou nœuds du graphe sont notés $N_1, N_2, \dots, N_k$. D'un instant à l'autre, le neurone N_i passe de l'état « non excité » (NON), dont la valeur est 0, à l'état « excité » (OUI), qui vaut 1, si la somme

des influx de ses voisins dépasse une valeur s_i appelée seuil d'excitation. Cette somme peut être pondérée par des coefficients a_{ij} à condition que les coefficients de pondération soient symétriques ($a_{ij} = a_{ji}$). La règle pour passer d'un état à l'autre est : L'état du nœud N_i est excité à l'étape $t+1$ si la somme des produits $a_{ij} \times$ (valeur du nœud N_j à l'étape t) pour tous les N_j auquel N_i est relié dépasse le seuil s_i de ce nœud. En choisissant bien les seuils s_i et en prenant les a_{ij} égaux à 1 ou 0 selon que N_i est lié à N_j ou non, on retrouve le modèle de la dynamique majoritaire. Le théorème de la période 1 ou 2 est vrai pour ce modèle neuronal.

> quand n augmente et vérifie précisément que : la suite $nb(N, n)^{1/n}$ est bornée, et la limite de toute suite extraite convergente est inférieure à $1+1/D^-$ où D^- est le plus grand nombre pair strictement inférieur à D .

Cela est un peu dur à avaler... tout n'est pas toujours aussi simple qu'on le souhaiterait ! Heureusement, l'application à des cas particuliers est facile.

Considérons le quadrillage du plan. On a $D=4$, $D^-=2$, $1+1/D^-=3/2$. Le nombre de nœuds à distance au plus n d'un nœud N est $(n+1)^2 + n^2$ (voir le dessin dans l'encadré 2). On vérifie que la suite numérique $nb(N, n)^{1/n} = ((n+1)^2 + n^2)^{1/n}$ a pour limite 1, ce qui est inférieur à $3/2$. La condition (b) est donc vérifiée. Pour le graphe planaire infini du quadrillage du plan, le théorème de la période 1 ou 2 est donc vrai.

Il en va de même pour le réseau de l'espace composé de cubes où chaque nœud est lié à six nœuds, et pour bien d'autres graphes infinis... mais pas pour l'arbre binaire infini !

QUAND UN NŒUD EST NON CONFORMISTE

Venons-en maintenant aux résultats les plus récents qui envisagent l'introduction d'une sorte de mouton noir ne se soumettant pas à la règle majoritaire.

Le modèle considéré est un peu plus général que celui décrit plus haut, ce qui renforce d'ailleurs l'intérêt des résultats récents. Nous noterons $N_1, N_2, \dots, N_k$ les nœuds du graphe. Le nœud N_i sera le nœud non conformiste.

Sa décision de choisir OUI ou NON pour le jour $t+1$ est fondée sur un mécanisme précis qui ne dépend que des choix faits par ses voisins le jour t . L'individu non conformiste N_i a retenu certaines configurations de ses voisins, par exemple {voisin 1, voisin 2} et {voisin 2, voisin 3, voisin 4}, et si chaque voisin de l'une de ces configurations a choisi NON le jour t , N_i choisira NON le jour $t+1$. Dans tous les autres cas, N_i choisit OUI le jour $t+1$.

Les autres nœuds adoptent un principe de seuil qui généralise l'idée du vote majoritaire : pour $i > 1$, un nœud N_i choisit NON le jour $t+1$ si le nombre de ses voisins qui ont choisi NON le jour t est supérieur ou égal à un nombre fixé s_i (s_i est le seuil qui lui fait choisir de voter NON). Le seuil s_i dépend du nœud N_i , mais une fois ces seuils fixés, ils ne changent plus.

L'idée de ce modèle est que certains membres de la communauté sont plus conciliants que d'autres et sont donc plus facilement prêts à choisir OUI. Si par exemple chaque nœud possède 10 voisins, certains ne se décideront à choisir NON pour le jour $t+1$ que lorsque plus de 9 voisins auront choisi NON le jour t , alors que d'autres opteront pour le NON dès que 6 voisins auront choisi NON le jour t ; d'autres, plus enclins encore à un vote négatif,

LIENS DE DÉSACCORD ET LIENS AIGRES

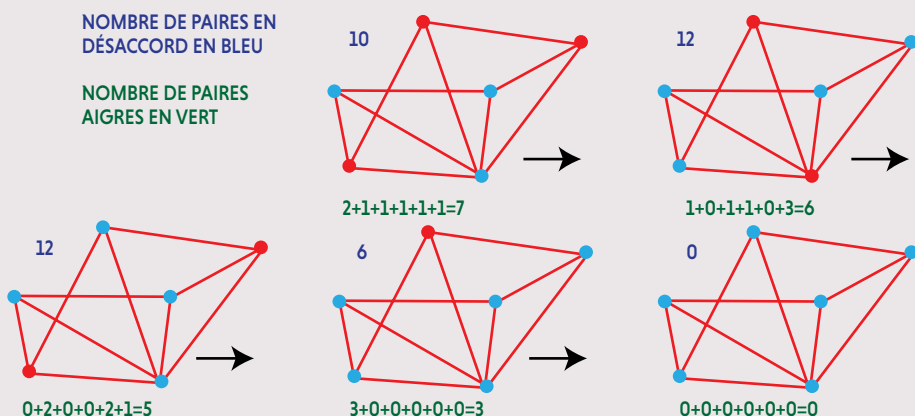
5

Dans la démonstration du théorème de Goles et Olivos donnée à la fin de l'article, on utilise la notion de paire de nœuds aigres : (N, N') est aigre si N à l'instant t ne choisit pas la même chose que N' à l'instant $t+1$. On démontre que le nombre de paires de nœuds aigres diminue nécessairement et finit par se stabiliser. Cela semble un peu

compliqué et on aurait aimé simplifier la démonstration en établissant que le nombre de paires de nœuds (N, N') en désaccord (N et N' choisissent différemment à l'instant t) diminue. Il se trouve que c'est faux : le nombre de paires de nœuds en désaccord augmente parfois quand on applique la dynamique majoritaire. Le dessin illustre une telle situation.

NOMBRE DE PAIRES EN DÉSACCORD EN BLEU

NOMBRE DE PAIRES AIGRES EN VERT



BIBLIOGRAPHIE

E. Cruciani et al., **Phase transition of the 2-choices dynamics on core-periphery networks**, prépublication arXiv:1804.07223, 2018.

J. Haslegrave et C. Cannings, **Majority dynamics with one nonconformist**, *Discrete Applied Mathematics*, vol. 219, pp. 32-39, 2017.

I. Benjamini et al., **Convergence, unanimity and disagreement in majority dynamics on unimodular graphs and random graphs**, *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 126(9), pp. 2719-2733, 2016.

Y. Ginosar et R. Holzman, **The majority action on infinite graphs: strings and puppets**, *Discrete Mathematics*, vol. 215(1-3), pp. 59-71, 2000.

G. Moran, **On the period-two-property of the majority operator in infinite graphs**, *Transactions of the AMS*, vol. 347(5), pp. 1649-1667, 1995.

E. Goles et J. Olivos, **Comportement périodique des fonctions à seuil binaires et applications**, *Discrete Applied Math.*, vol. 3, pp. 93-105, 1981 ; **Periodic behaviour of generalized threshold functions**, *Discrete Mathematics*, vol. 30(2), pp. 187-189, 1980.

choisiront NON dès que deux de leurs voisins auront choisi NON le jour t .

Voici les théorèmes récents qui généralisent le théorème de la période 1 ou 2.

(A) Si l'on accepte que deux voisins de N_i soient eux-mêmes voisins (présence d'un triangle N_i, N_p, N_p), alors la présence d'un nœud non conformiste rend possible toute longueur de cycle. Pour avoir la période 3, il faut que N_i soit voisin de lui-même (boucle).

(B) Si deux voisins de N_i ne sont jamais voisins (pas de triangle N_i, N_p, N_p), et qu'un nœud n'est jamais considéré comme voisin de lui-même, alors, quelle que soit la règle appliquée par le nœud non conformiste N_i et quels que soient les seuils choisis par les autres nœuds, seuls des cycles de longueur 1, 2 ou 4 sont possibles.

(C) Sous les mêmes conditions, mais en acceptant maintenant qu'un nœud puisse être son propre voisin (boucle), les longueurs des cycles possibles sont tous les entiers de la liste 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12.

(D) Dans le cas où le nœud N_i suit une règle d'antimajorité, il choisit le jour $t+1$ ce qui était minoritaire chez ses voisins le jour t , et maintenant même si deux de ses voisins sont liés, les cycles possibles sont : 1, 2, 4, 5, 6 et 10 quand il n'y a pas de boucle.

(E) Il faut ajouter 3 et 8 si les boucles sont autorisées.

Les chercheurs ont par ailleurs établi que ces résultats sont les meilleurs possibles en montrant qu'en respectant les hypothèses des théorèmes, chacune des longueurs de cycles énumérées se produit réellement.

L'encadré 3 donne des exemples de ces extraordinaires situations où des longueurs de cycles autres que 1 et 2 se produisent.

COMMENT PROUVER CE GENRE DE CHOSES ?

À titre d'exemple, voici, pour les plus courageux, en évitant toute formule et en simplifiant au maximum, la démonstration de la forme envisagée au début de cet article du résultat de Goles et Olivos.

Contexte. On se donne un graphe fini indiquant les liens entre personnes d'une communauté. Chaque nœud du graphe a un avis OUI ou NON à l'instant t . De l'instant t à l'instant $t+1$, chaque nœud peut changer d'avis. Quand plus de la moitié de ses voisins sont d'avis contraire au sien, il prend alors l'avis de cette majorité de voisins. En cas d'égalité, il conserve son avis.

Affirmation. Au bout d'un certain temps, ce mécanisme conduit à une stabilisation de tous les avis, ou alors à une oscillation des avis entre deux états, autrement dit le graphe reprend le même état exactement au bout des deux étapes.

Démonstration. On dit qu'un couple de nœuds (N, N') est « aigre entre l'instant t et l'instant $t+1$ » si N et N' sont reliés et que N à l'instant t a un avis différent de N' à l'instant $t+1$ (attention: on ne considère pas le même instant pour N et N').

Montrons qu'il y a stabilité ou décroissance quand on passe du nombre de couples aigres entre $t-1$ et t au nombre de couples aigres entre t et $t+1$.

Considérons un nœud particulier N , fixé. Soit m le nombre de couples (N, N') aigres entre $t-1$ et t . Et soit n le nombre de couples (N', N) aigres entre t et $t+1$. Nous allons montrer que $m \geq n$.

Cas 1. Supposons que N ne change pas d'avis entre $t-1$ et $t+1$. Alors, nécessairement: $n=m$. En effet, si N a le même avis à l'instant $t-1$ et à l'instant $t+1$ (nous l'avons supposé) et si N' est lié à N , alors N à l'instant $t-1$ a un avis différent de N' à l'instant t si et seulement si N' à l'instant t a un avis différent de N à l'instant $t+1$.

Cas 2. Supposons que N change d'avis entre l'instant $t-1$ et l'instant $t+1$. Deux cas sont possibles.

(a) N a gardé le même avis entre $t-1$ et t , et a changé d'avis entre t et $t+1$. À l'instant t , N était donc entouré de plus de nœuds ayant un avis différent du sien que de nœuds ayant le même avis que le sien. Il y avait donc plus de la moitié des couples (N, N') liés qui étaient aigres entre l'instant $t-1$ et l'instant t et moins de la moitié des couples (N', N) qui étaient aigres entre t et $t+1$. C'est donc que $n < m$.

(b) N a changé d'avis entre $t-1$ et t , et l'a gardé entre t et $t+1$. Si N a gardé le même avis entre l'instant t et l'instant $t+1$, c'est qu'à l'instant t , il y avait plus de nœuds N' liés à N qui étaient de son avis (contraire à celui qu'il avait à l'instant $t-1$), disons k , que de nœuds voisins ayant un avis différent, disons h : $k > h$. On remarque alors que $m=k$ et $n=h$. On a donc $n < m$.

Si N change d'avis entre $t-1$ et $t+1$ on a donc toujours $n < m$. Le regroupement des cas 1 et 2 signifie que $n \leq m$.

Le nœud N était fixé. Faisons-le varier. On obtient que le nombre total de couples (N', N) aigres entre l'instant t et l'instant $t+1$ (c'est la somme des n associés à chaque nœud N) est inférieur ou égal au nombre total des couples (N, N') aigres entre l'instant $t-1$ et l'instant t (qui est la somme des m associés à chaque nœud N). Le nombre de couples aigres entre t et $t+1$ est donc inférieur ou égal au nombre de couples aigres entre $t-1$ et t . Dit autrement, le nombre de couples aigres décroît ou reste stable.

Ce nombre total ne peut décroître indéfiniment; arrive donc un moment où il se stabilise. Quand il est stabilisé, le cas 2 ne se produit plus, donc chaque nœud d'un instant $t-1$ à l'instant $t+1$ garde le même avis. CQFD. ■