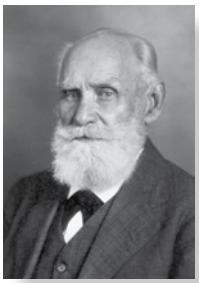


1890 Pavlov est nommé directeur du département de physiologie de Saint-Pétersbourg, poste qu'il occupera durant quarante-cinq ans. Il fait de cette structure l'un des meilleurs centres mondiaux d'étude du corps humain.

1904 Prix Nobel de médecine et de physiologie pour ses découvertes sur le système digestif.

1922-1936 Sous le régime soviétique, Pavlov est considéré comme l'un des plus éminents scientifiques du pays. Fort de sa position, il n'hésite pas à prendre la défense de plusieurs intellectuels durant les purges staliniennes.

1936 Pavlov meurt entouré de ses élèves, auxquels il décrit minutieusement son agonie. Son dernier projet était en effet de léguer à ses successeurs un modèle des phases terminales de la vie, qui aurait associé mesures objectives et sensations subjectives du mourant.

Pavlov expliqua plus avant l'utilité des réflexes. Pour lui, l'animal répondait à son environnement en activant un système de «neuroanalyse» qui l'aidait à établir la nature des stimuli alentour. Il en tirait une «neurosynthèse», c'est-à-dire qu'il déterminait si un stimulus était associé à quelque chose de connu, pour lequel il disposait d'une réaction toute prête. Il raccourcissait ainsi son temps de réponse, un atout fondamental en cas de danger.

LES BASES DE LA PLASTICITÉ CÉRÉBRALE

Pavlov était convaincu que ses conclusions s'appliquaient aussi à l'homme. «Plus un organisme est évolué, écrivit-il, plus il est habile [...] à s'adapter de façon précise et variée aux conditions environnementales.» La culture comme la société étaient selon lui interprétables comme des systèmes complexes de gestion des réflexes: les êtres humains se distinguaient des animaux en ce que leurs réflexes conditionnés étaient devenus beaucoup plus nombreux que leurs réflexes innés. Mais l'éducation de l'homme ne devait pas être si différente de celle de son meilleur ami canin: dans les deux cas, des stades de développement de complexité croissante se succédaient et certains apprentissages étaient «déprogrammés».

Selon Pavlov, le cerveau humain trouve toujours de la place pour emmagasiner de nouveaux réflexes et il est toujours possible de modifier ceux qui existent. Cela signifie que même si la plupart du temps nous nous reposons sur l'habitude et sur l'apprentissage culturel, nous restons en mesure de changer nos schémas comportementaux.

C'est notamment de cette idée que sont nées les thérapies cognitivo-comportementales, qui visent à déprogrammer progressivement les apprentissages néfastes. Elles sont plus modérées que le comportementalisme pur et dur, selon lequel nous sommes le produit de nos conditionnements, à la liberté très limitée. Elles connaissent aujourd'hui une nouvelle jeunesse et leurs effets thérapeutiques sont reconnus dans de nombreuses pathologies, comme les troubles obsessionnels compulsifs et les états anxieux.

Contrairement à d'autres formes de psychothérapie, les thérapies cognitivo-comportementales ont une efficacité facilement mesurable, même selon les critères rigoureux des expérimentations cliniques. Voilà pourquoi la majorité des études confirmant l'utilité de la psychothérapie portent sur ce type d'intervention.

Nous devons donc aux chiens de Pavlov la première démonstration de la formidable nature plastique de notre cerveau, ainsi qu'une pensée rassurante: avec quelques efforts, nous pouvons toujours changer ce qui ne fonctionne pas correctement chez nous. ■

BIBLIOGRAPHIE

D. P. Todes, **Pavlov's physiology factory,** *Isis*, vol. 88(2), pp. 205-246, 1997.

I. Pavlov, **Les Réflexes conditionnés,** PUF, 1977.

R

ENDEZ-VOUS

MYSTÉRIEUX DIVISEURS

La somme des diviseurs d'un nombre entier suscite une multitude d'interrogations. Depuis plus de deux millénaires, des passionnés tentent d'y répondre. Une tâche inachevée !

Marin Mersenne (1588 - 1648)

Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. Si l'on ne considère que les diviseurs de 6 différents de 6, que l'on dénomme *parties aliquotes* de 6, ce sont 1, 2 et 3. Leur somme est égale à 6. Ainsi, la somme des parties aliquotes de 6 vaut 6. Depuis l'Antiquité, cette propriété inattendue intrigue les amateurs d'arithmétique et l'on appelle « nombres parfaits » les entiers, tels que 6, dont la somme de leurs parties aliquotes est égale à eux-mêmes.

L'entier 28, dont les parties aliquotes sont 1, 2, 4, 7 et 14 est le deuxième nombre parfait. Les pythagoriciens se sont intéressés à ces nombres, mais même plus tard dans l'Antiquité, on n'a trouvé que les quatre plus petits qui sont 6, 28, 496 et 8128. Au tournant de notre ère, Philon d'Alexandrie, dans son ouvrage sur la Création, mentionne que si le monde a été créé en 6 jours et que la Lune tourne autour de la Terre en 28 jours, c'est parce que 6 et 28 sont des nombres parfaits. Saint Augustin (354-430) a repris la première affirmation.

Les nombres parfaits au-delà de 8128 sont 33 550 336, 8 589 869 056, 137 438 691 328, 2 305 843 008 139 952 128, etc. On connaît aujourd'hui 50 nombres parfaits. Ils sont tous de la forme $2^{p-1}(2^p-1)$ où 2^p-1 est un nombre premier. Les valeurs de p qui donnent les nombres parfaits connus sont :

2, qui donne $2^1(2^2-1)=6$; 3, qui donne $2^2(2^3-1)=28$; 5, qui donne $2^4(2^5-1)=496$; 7 ; 13 ; 17 ; 19 ; 31 ; 61 ; 89 ; 107 ; 127 ; 521 ; 607 ; 1279 ; 2203 ; 2281 ; 3217 ; 4253 ; 4423 ; 9689 ; 9941 ; 11213 ; 19937 ; 21701 ; 23209 ; 44497 ; 86243 ; 110503 ; 132049 ; 216091 ; 756839 ; 859433 ; 1257787 ; 1398269 ; 2 976 221 ; 3 021 377 ; 6 972 593 ; 13 466 917 ;

NOMBRES PREMIERS ET SUITES ALIQUOTES

Le 3 janvier 2018, Jonathan Pace, à l'université Stanford, recherchait par ordinateur des grands nombres premiers et participait ainsi à un grand calcul distribué fonctionnant depuis plus de 20 ans. Il a eu la chance de trouver le nombre $2^{77\,232\,917}-1$. C'est le plus grand nombre premier connu, et il a plus de 23 millions de chiffres décimaux. Si vous souhaitez tenter votre chance, consultez le site internet GIMPS qui coordonne cette recherche de nombres premiers records : https://www.mersenne.org.

Ce nombre premier est un nombre de Mersenne, c'est-à-dire de la forme 2^k-1. En espaçant les chiffres d'un millimètre, l'écriture du nombre premier record occuperait une longueur de 23 kilomètres, et au rythme d'un chiffre par seconde, il vous faudrait 269 jours pour l'écrire. La découverte détermine le 50e nombre parfait, qui est : $2^{77\,232\,916}(2^{77\,232\,917}-1)$. Ce nombre parfait a deux fois plus de chiffres décimaux que le nombre premier qui lui donne naissance. Les nombres parfaits sont ceux qui sont égaux à la somme de leurs « parties aliquotes », c'est-à-dire de leurs diviseurs différents d'eux-mêmes. Les trois plus petits sont :
$6 = 1 + 2 + 3$;
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$;
$496 = 2^4(2^5 - 1) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$.

On notera $s(n)$ la somme des parties aliquotes de l'entier n.

Voici quelques définitions complémentaires :
- n est parfait si $s(n) = n$.
- n et m forment une paire amiable si $s(n) = m$ et $s(m) = n$.
- $n_1, n_2, \ldots, n_k$ constituent une chaîne sociable si : $s(n_1) = n_2$, $s(n_2) = n_3$, ..., $s(n_k) = n_1$.
- La suite aliquote partant de n est la suite : n, $s(n)$, $s(s(n))$, $s(s(s(n)))$, ...

20 996 011 ; 24 036 583 ; 25 964 951 ; 30 402 457 ; 32 582 657 ; 37 156 667 ; 42 643 801 ; 43 112 609 ; 57 885 161 ; 74 207 281 ; 77 232 917.

Les plus grands, à partir du 35e, proviennent des calculs du projet GIMPS (https://www.mersenne.org/primes/) qui, depuis 1996, organise une recherche distribuée systématique pour découvrir ces nombres. Et il est possible qu'entre les trois derniers de la liste se glissent d'autres nombres parfaits pairs non encore découverts.

Les nombres premiers de la forme 2^p-1 sont dénommés « nombres premiers de Mersenne ». Vers 300 avant notre ère, Euclide, dans le livre IX de ses *Éléments*, a démontré que si 2^p-1 est un nombre premier, alors $2^{p-1}(2^p-1)$ est un nombre parfait pair. Au XVIIe siècle, le grand Leonhard Euler a prouvé la réciproque : si un nombre pair est parfait, alors il est nécessairement de la forme $2^{p-1}(2^p-1)$ où p est tel que 2^p-1 soit un nombre premier. Trouver des nombres premiers de Mersenne est donc équivalent à trouver des nombres parfaits pairs. GIMPS signifie d'ailleurs *Great internet Mersenne Primes Search*.

On déduit de la caractérisation des nombres parfaits par Euclide et Euler que les nombres parfaits pairs à partir de 28 sont des sommes de cubes de nombres impairs successifs. On a par exemple : $28 = 1^3 + 3^3$; $496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$; $8128 = 1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+11^3+13^3+15^3$.

Bien que connaissant la forme que prend nécessairement tout nombre parfait pair, on ne sait pas démontrer qu'il en existe une infinité. On conjecture que oui.

À l'inverse, on pense qu'il n'existe aucun nombre parfait impair, mais c'est encore une affirmation non démontrée. Les travaux mathématiques sur les nombres parfaits impairs ont conduit à quelques résultats remarquables qui montrent que, s'il en existe, ils seront difficiles à trouver. On sait que si N est un nombre parfait impair, alors il est supérieur à 10^{1500} et comporte au moins 101 diviseurs premiers (résultat de Pascal Ochem et Michaël Rao, publié en 2012). Parmi les facteurs premiers d'un tel N, s'il existe, au moins 10 sont distincts (résultat de Pace Nielsen, publié en 2015). De plus, si 3 n'est pas un diviseur de N, alors N comporte au moins 12 facteurs premiers distincts (résultat de Pace Nielsen, publié en 2007).

UN MILLIARD DE PAIRES AMIABLES

Si l'on note $s(n)$ la somme des parties aliquotes de n et qu'on s'amuse à calculer patiemment les valeurs de cette fonction, entier après entier, on découvre que $s(220) = 284$ et que $s(284) = 220$. En effet, 284 est divisible par 1, 2, 4, 71 et 142, dont la somme est 220, tandis que 220 est divisible par 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 et 110, dont la somme est 284.

Cette association miraculeuse des entiers 220 et 284 a retenu l'attention des amateurs de nombres qui ont qualifié de tels couples, où la somme des diviseurs de l'un est égale à la valeur de l'autre, de « paires amiables » ou « paires aimables » ou « nombres amicaux ». Les dix premières paires amiables sont : 220-284, 1184-1210, 2620-2924, 5020-5564, 6232-6368, 10 744-10 856, 12 285-14 595, 17 296-18 416, 63 020-76 084, 66 928-66 992.

Avant Euler, on ne connaissait que trois paires de nombres amiables. Ne dédaignant pas ces problèmes arithmétiques, Euler découvrit cinq méthodes pour construire des paires de nombres amiables. Grâce à elles, il proposa >

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (Cristal)

2

LES DIVISEURS D'UN ENTIER

Une fois qu'un entier n est écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers, par exemple $n = 3\,400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 17$, il est facile de connaître ses diviseurs et leur somme sans faire de calculs compliqués. Expliquons pourquoi. Les diviseurs de n sont les nombres ayant comme facteurs premiers des nombres premiers pris parmi ceux qui apparaissent dans la décomposition de n, avec des exposants inférieurs ou égaux à ceux qui y apparaissent. Pour $n = 3\,400$, il y aura donc : $2^3 \cdot 5 \cdot 17$, $2^2 \cdot 5^2 \cdot 17$, $2^2 \cdot 5$, 5^2, $5^2 \cdot 17$, etc. La somme $S(3\,400)$ des diviseurs de 3 400 (en acceptant 3 400 lui-même) est alors assez facile à connaître sans avoir à les énumérer. Elle est donnée en développant le produit $(1 + 2 + 2^2 + 2^3)(1 + 5 + 5^2)(1 + 17)$. En effet, pour développer ce produit, on prend un terme dans chaque parenthèse et on les multiplie, ce qui donne exactement la somme des diviseurs. On utilise ensuite la formule $(1 + a + a^2 + \ldots + a^k) = (a^{k+1} - 1)/(a - 1)$, d'où : $S(3\,400) = [(2^4 - 1)/(2 - 1)] \times [(5^3 - 1)/(5 - 1)] \times [(17^2 - 1)/(17 - 1)] = (15 \times 124 \times 288)/(4 \times 16) = 8\,370$.

On vérifie le résultat en recherchant patiemment tous les diviseurs de 3 400 et en les additionnant : $S(3\,400) = 1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 10 + 17 + 20 + 25 + 34 + 40 + 50 + 68 + 85 + 100 + 136 + 170 + 200 + 340 + 425 + 680 + 850 + 1\,700 + 3\,400 = 8\,370$.

La méthode décrite avec 3 400 est, bien sûr, générale. On comprend que le problème de calculer la somme des diviseurs d'un entier se réduit à celui de sa factorisation en produit de nombres premiers. Comme le problème de la factorisation est difficile, le problème du calcul de la somme des diviseurs d'un nombre l'est aussi. Cela rend délicats et longs les calculs pour trouver les nombres parfaits, les paires amiables, les chaînes sociables et, bien entendu, les suites aliquotes.

C'est aussi ce qui explique l'impossibilité pratique de continuer le calcul d'une suite aliquote quand on arrive à de très grands nombres ayant de grands facteurs premiers.

> 59 nouvelles paires. Adrien-Marie Legendre proposa aussi une nouvelle paire de nombres amiables en 1830.

Le mathématicien belge Paul Poulet, mort en 1946, fut le premier à utiliser, à la main bien sûr, les tests de primalité mis au point au XIXe siècle par le Français Édouard Lucas, inventeur du fameux casse-tête des tours de Hanoï. Poulet en tira 105 nouvelles paires de nombres amiables.

En 1946, on connaissait 390 paires de ce type. Grâce aux ordinateurs, on a pu aller bien plus loin. En 2002, quand j'abordai ce sujet dans un article de *Pour la Science*, on connaissait seulement 2 millions de paires amiables. Aujourd'hui (au 8 janvier 2019), on en connaît 1222571199 et ce nombre change tous les jours. Elles se trouvent sur le site internet https://sech.me/ap/ tenu par Sergei Chernykh, un passionné de nombres qui vit à Stockholm.

La proportion des entiers appartenant à une paire amiable tend vers zéro

Un projet de calcul distribué dédié à cette recherche a été mis en place dont l'objectif est de connaître toutes les paires amiables dont le plus petit élément est inférieur à 10^{20} (voir https://sech.me/boinc/Amicable/).

Le site de Sergei Chernykh indique combien les chercheurs de paires de nombres amiables en ont trouvé. Il précise par exemple que Legendre en a trouvé une, que Poulet en a trouvé 105 et que les deux plus gros découvreurs sont Robert Gerbicz, qui en a trouvé 173470689 et Sergei Chernykh lui-même, qui détient le record avec 1029730080 paires amiables à son actif, soit plus de 80% des paires connues!

Les deux nombres des paires amiables connues ont toujours la même parité: ils sont tous deux pairs ou impairs. On ignore s'il existe des paires amiables de type pair-impair, mais s'il en existe, on démontre que le nombre pair sera un carré ou le double d'un carré.

On constate que les entiers d'une paire de nombres amiables ont toujours un diviseur commun. On ignore si cela est vrai en général, mais on démontre que s'il existe une paire amiable (m, n) pour laquelle m et n n'ont pas de diviseurs communs, alors le produit mn dépasse 10^{67}.

Le mathématicien hongrois Paul Erdős (toujours lui!) a prouvé en 1955 que la proportion de nombres entiers appartenant à une paire amiable parmi les entiers inférieurs à n tend vers 0 quand n tend vers l'infini: la densité des nombres amiables est nulle.

Quand on additionne les deux nombres d'une paire amiable, par exemple 6232+6368=12600, on remarque qu'assez fréquemment cette somme est divisible par 10. Une exploration systématique indique que 73 des 100 premières paires ont une somme divisible par 10 et que 825 des 1000 premières paires ont une somme divisible par 10. On conjecture donc que la proportion de paires amiables dont la somme est divisible par 10 tend vers 100% quand on fait tendre vers l'infini le nombre de paires prises en compte.

LES CHAÎNES SOCIABLES

Parfois, lorsqu'on part d'un entier n et que l'on calcule $s(n)$, $s(s(n))$, $s(s(s(n)))$, etc., on retombe sur n. On nomme «chaînes sociables» ces suites qui reviennent à leur point de départ. Si l'on retrouve n tout de suite, c'est que n est un nombre parfait; si on le retrouve seulement avec $s(s(n))$, c'est que n et $s(n)$ forment une paire amiable. Les autres chaînes sociables sont assez mal connues et on ne progresse guère à leur sujet. On ne connaît que 5398 chaînes sociables d'ordre 4, 1 d'ordre 5, 5 d'ordre 6, 4 d'ordre 8, 1 d'ordre 9 et 1 d'ordre 28. On ignore par exemple s'il existe des chaînes sociables à trois maillons $n \to s(n) \to s(s(n)) \to n$. Il n'en existe peut-être pas, mais comment le démontrer?

Les valeurs de la fonction $n \to s(n)$ sont relativement faciles à calculer quand on connaît une décomposition de n en produit de facteurs premiers (*voir l'encadré 2*). Cependant, et c'est bien là le problème, si certains grands nombres se factorisent aisément, par exemple ceux de la forme 2^k, d'autres sont extrêmement difficiles à factoriser et aujourd'hui on ne connaît pas de méthode permettant de factoriser facilement n'importe quel nombre composé de 200 chiffres.

QUE SE PASSE-T-IL QUAND ON RECOMMENCE ?

Finalement, vient à l'esprit la question suivante: partant d'un entier n, que se passe-t-il quand on calcule $s(n)$, $s(s(n))$, $s(s(s(n)))$ et que l'on poursuit autant que possible?

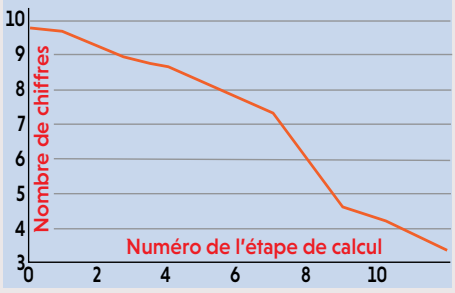
Les suites obtenues sont dénommées «suites aliquotes». Elles sont l'objet d'un travail acharné de calculs et d'études mathématiques. La communauté qui s'y intéresse mobilise des capacités >

3 LES SUITES ALIQUOTES

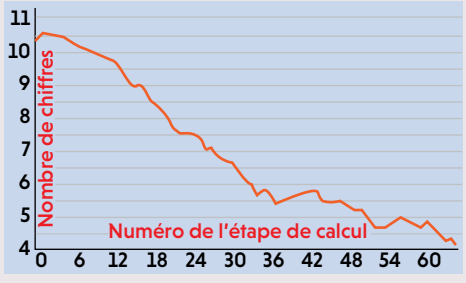
Beaucoup de suites aliquotes n, $s(n)$, $s(s(n))$, $s(s(s(n)))$, ... aboutissent à un nombre premier qui donne alors 1, puis 0. D'autres conduisent à un nombre parfait, ou à un nombre appartenant à une paire amiable ou à une chaîne sociable, et restent donc bornées. La question de savoir s'il existe des suites aliquotes tendant vers l'infini reste aujourd'hui non résolue, malgré les efforts considérables investis.

La conjecture de Catalan affirme qu'il n'existe aucune suite aliquote (infinie) non bornée. Plusieurs résultats théoriques suggèrent qu'elle est juste, mais d'autres semblent favoriser la conclusion inverse *(voir le texte principal)*. Voici trois exemples de suites aliquotes bornées, suivies de trois exemples de suites aliquotes dont le statut reste inconnu et qui pourraient donc être non bornées et invalider la conjecture de Catalan. Pour les trois dernières suites le calcul s'arrête parce qu'on rencontre un entier qu'on ne parvient pas, aujourd'hui, à factoriser.

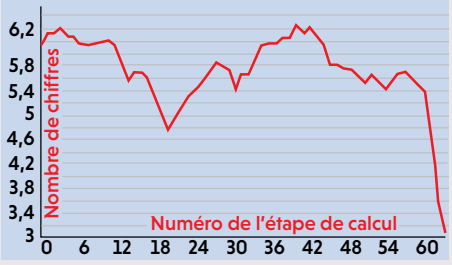
A. n = 555 555 555. La suite aliquote décroît sans à-coups, jusqu'à arriver au nombre premier 233, qui donne 1 puis 0.



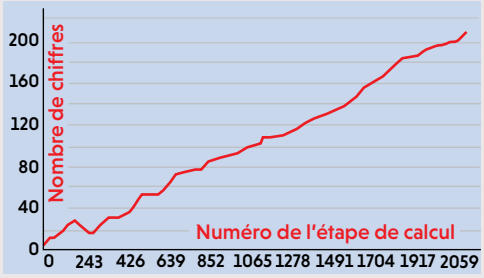
B. n = 1 960 000 000. La suite décroît moins régulièrement que la première, mais finit par arriver au nombre premier 1 093.



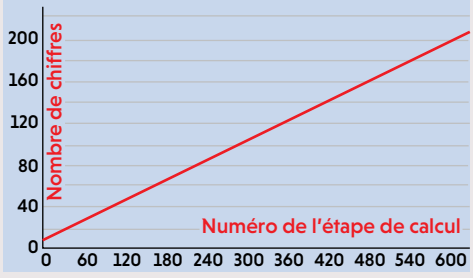
C. n = 123 456. La suite est hésitante, puis arrive à un point où elle chute brutalement vers le nombre premier 113.



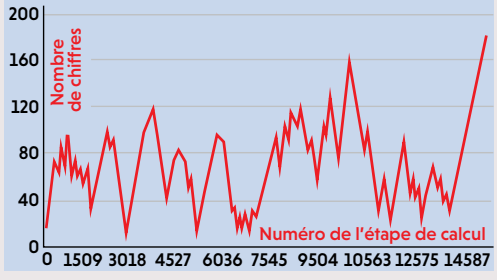
D. n = 276. La suite semble vouloir monter régulièrement. On doit arrêter le calcul, car on tombe sur un facteur de 205 chiffres qui bloque le calcul. L'entier 276 est le plus petit entier conduisant à un tel blocage.



E. n = 19 560. La suite semble extrêmement régulière et croissante jusqu'au blocage du calcul à cause d'un facteur de 203 chiffres. On imagine que, plus loin, elle continuera à monter à la même vitesse et donc ne sera pas bornée, ce qui contredira la conjecture de Catalan. Mais il manque la démonstration !



F. n = 2 005 020. Ce cas illustre à quel point une suite aliquote peut avoir un comportement irrégulier avant de sortir de la zone où les calculs sont possibles (ici, à cause d'un facteur de 180 chiffres). On a pu calculer 15 072 termes de la suite avant d'arriver à un facteur trop grand qui bloque le calcul. Le fichier de calcul associé à cette suite fait 845 pages !



Vérifiez les calculs ou faites-en d'autres en demandant (pour A) :

http://factordb.com/sequences.php?se=1&aq=555555555&action=all&fr=0&to=100

SUR LE WEB

Point de rencontre pour les passionnés des questions traitées dans l'article : www.mersenneforum.org

Site dédié aux suites aliquotes où tout le monde peut contribuer : http://yafu.myfirewall.org/yafu/

Pour suivre au jour le jour les calculs des séquences aliquotes : www.rechenkraft.net/aliquot/AllSeq.html

Site, riche en informations, d'un groupe français (Jean-Luc Garambois, Cédric Barret, Olivier Huber, Matthieu Bachschmidt, Youssef Chtaibi, Francis Jamm) sur les suites aliquotes : www.aliquotes.com

> informatiques colossales, tant l'excitation curieuse qui l'anime est forte. Un étonnant groupe de passionnés français, qui inclut Jean-Luc Garambois, un professeur des écoles habitant dans l'Est de la France, et Paul Zimmermann, un chercheur de l'Inria à Nancy, s'attache depuis plus de quinze ans à comprendre ces suites, aussi bien en menant des calculs qu'en formulant des conjectures et parfois en démontrant des résultats mathématiques.

Que peut-il se passer quand on s'engage dans le calcul d'une suite aliquote $s(n)$, $s(s(n))$, $s(s(s(n)))$, ...? Voici les diverses éventualités.

SUITES ALIQUOTES: SIX CAS

Cas 1. Les nombres 1 et 0 n'ont pas de diviseur différent d'eux-mêmes et donc $s(0)=s(1)=0$. Le calcul des suites aliquotes à partir de 0 ou 1 s'arrête immédiatement.

Cas 2. Les nombres premiers p, par définition, n'ont que 1 comme partie aliquote. Ils donnent donc 1, puis 0: $p \to 1 \to 0$.

Cas 3. Certains nombres reviennent sur eux-mêmes après un cheminement plus ou moins long, car ils appartiennent à une chaîne sociable. Partant par exemple du nombre 12496, repéré par Poulet en 1918, on passe par 14288, puis 15472, 14536, 14264 qui redonne 12496.

Cette chaîne sociable d'ordre 5 produit une suite aliquote périodique et c'est aussi le cas pour les nombres parfaits et les nombres amiables:
$28 \to 28 \to 28 \to \ldots$;
$220 \to 284 \to 220 \to 284 \to 220 \to 284 \to \ldots$

Cas 4. La suite aliquote, après un parcours plus ou moins long, tombe sur un nombre premier qui donne 1, puis 0:
$75 \to 49 \to 8 \to 7 \to 1 \to 0$.

Par exemple, la suite aliquote partant de 285612 compte 490 termes avant d'arriver au nombre premier 59, qui donne 1 puis 0. Vous pouvez le vérifier grâce au site internet:

http://factordb.com/sequences.php?se=1&aq=285612&action=all

Ce site affiche toutes les étapes avec, pour chaque nombre calculé, sa décomposition en facteurs premiers, ce qui lui prend environ 20 secondes.

Cas 5. La suite aliquote tombe à un moment sur un nombre appartement à une chaîne sociable et se met donc à tourner en rond. Ainsi, le nombre 2856, après 29 étapes, tombe sur la seule chaîne sociable d'ordre 28 connue (voir: http://factordb.com/sequences.php?se=1&aq=2856&action=all).

Cas 6. Dernière éventualité, la suite aliquote continue indéfiniment sans repasser deux fois par le même nombre et tend donc vers l'infini.

Ce dernier cas n'a jamais été rencontré: certaines suites aliquotes semblent se poursuivre très longtemps, mais la difficulté de la factorisation, quand les nombres de la suite deviennent trop grands, fait que l'on ne peut poursuivre le calcul. Ces suites aux statuts indéterminés agacent les mathématiciens.

Parmi les nombres entiers inférieurs à 1000, on sait que tous, sauf peut-être cinq, donnent des suites aliquotes bornées (cas 1 à cas 5). En revanche, les suites aliquotes engendrées par 276, 552, 564, 660, 966 ont un statut inconnu. Elles correspondent peut-être au cas 6. Ces cinq nombres sont dénommés les «cinq de Lehmer» en mémoire du mathématicien américain Derrick Lehmer, mort en 1991, qui découvrit leur statut particulier. Pour 276, on a calculé

4

LE GRAPHE MYSTÉRIEUX

À la fonction $n \to s(n)$ (la somme des parties aliquotes de n), on associe un graphe infini. Les nœuds en sont les entiers, et il y a un arc reliant n à $s(n)$ pour chaque entier n (une partie de graphe est représentée ci-contre). Voyons quelques questions sur lesquelles on travaille aujourd'hui.

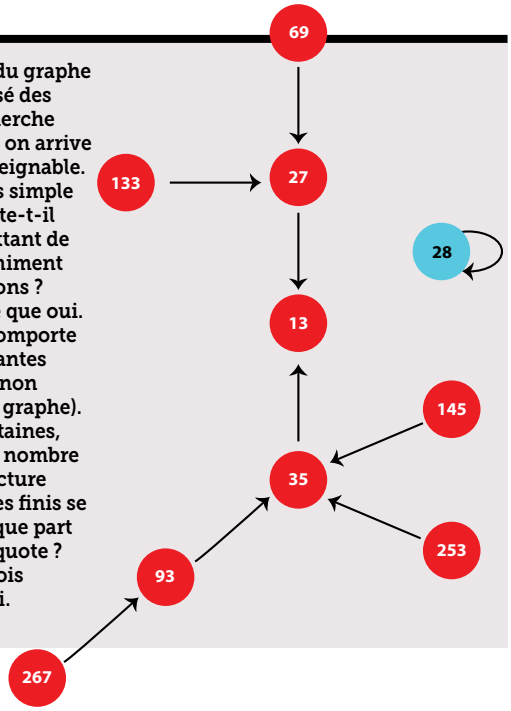
1. Certains entiers n sont l'extrémité d'un arc et s'écrivent $n = s(m)$ pour un certain entier m. On les qualifie d'« atteignables » ; les autres sont dits inatteignables.

En admettant vraie la conjecture de Goldbach, la proportion des nombres impairs non atteignables est nulle à l'infini. Pour les nombres pairs, Paul Erdős a prouvé en 1973 que les nombres pairs inatteignables représentent, à l'infini, une proportion strictement positive des nombres pairs.

En 2015, Florian Luca et Carl Pomerance ont prouvé que les nombres pairs atteignables représentent aussi une proportion strictement positive des nombres pairs.

2. De même que, partant de n, on peut étudier la suite aliquote n, $s(n)$, $s(s(n))$, ..., il est intéressant de savoir ce qui se passe si on inverse la recherche : partant de n, on recherche n_1 tel que $s(n_1) = n$, puis on recherche n_2 tel que $n_1 = s(n_2)$, etc. Cela revient à suivre les flèches du graphe dans le sens opposé des flèches. Cette recherche est bloquée quand on arrive à un nombre inatteignable. La question la plus simple à ce sujet est : existe-t-il des entiers permettant de poursuivre indéfiniment ce chemin à reculons ? Il est très probable que oui.

3. Le graphe comporte plusieurs composantes connexes (parties non reliées au reste du graphe). On en connaît certaines, mais sont-elles en nombre infini ? Toute structure possible de graphes finis se trouve-t-elle quelque part dans le graphe aliquote ? Jean-Luc Garambois conjecture que oui.



2122 termes de la suite aliquote. On reste coincé car, quand on arrive au terme 2122, on doit factoriser un nombre de 211 chiffres pour calculer le nombre suivant (*voir l'encadré 3*). On a bien trouvé les facteurs premiers 2, 3, 3, 7, 19, 709 de ce nombre, mais le facteur restant est un entier de 205 chiffres que l'on n'arrive pour l'instant pas à factoriser. Essayez:

http://factordb.com/sequences.php?se=1&aq=276&action=all

La suite aliquote la plus longue connue est celle dont le point de départ est 2005020. Elle comporte 15072 termes connus.

La suite aliquote ayant pour point de départ 2340 est remarquable, car elle conduit au bout de 790 étapes à un nombre de 216 chiffres dont l'un des facteurs comporte 201 chiffres et que l'on n'a pas réussi à factoriser à ce jour.

DEUX CONJECTURES CONTRADICTOIRES

Le mathématicien franco-belge Eugène Catalan a conjecturé en 1888 que toutes les suites aliquotes étaient bornées, se terminant par 0 ou par un cycle. Un argument assez fort en faveur de cette conjecture est la démonstration que la moyenne des $s(n)/n$ tend vers $\pi^2/6-1=0{,}644934\ldots$ quand n tend vers l'infini. En effet, ce résultat signifie que $s(n)$ est, le plus souvent, inférieur à n. Si on assimile les nombres d'une suite aliquote à des nombres tirés au hasard parmi les entiers en suivant la règle que la moyenne de $s(n)/n$ tend vers 0,644934..., alors nécessairement ils restent bornés. Cependant, c'est là un argument incomplet, car les éléments d'une suite aliquotes ne sont pas tirés au hasard! On parle d'argument heuristique pour de telles conclusions fondées sur un résultat rigoureux, mais qui concernent seulement un modèle imparfait de ce qui se produit.

D'ailleurs, une autre conjecture a été proposée vers 1975 par le Britannique Richard Guy et l'Américain John Selfridge. Elle stipule que sauf pour une proportion nulle de nombres impairs n, la suite aliquote de n est bornée, et que sauf pour une proportion nulle de nombres pairs n, la suite aliquote de n tend vers l'infini.

La raison d'introduire une distinction entre n pair et n impair est que quand on passe de n à $s(n)$, la parité se conserve, sauf si n est un carré ou le double d'un carré. Comme cette éventualité est de plus en plus rare quand n devient grand, en pratique les changements de parité finissent par ne plus se produire et il faut donc raisonner en séparant les nombres pairs et les nombres impairs.

On sait établir que quand n est pair, la moyenne des nombres $s(n)/n$ tend vers $5\pi^2/24-1=1{,}056147\ldots$, ce qui signifie que, en gros, $s(n)$ est supérieur à n. Et on sait aussi prouver que quand n est impair, la moyenne des nombres $s(n)/n$ tend vers $3\pi^2/24-1=0{,}233700\ldots$, ce qui signifie qu'en gros $s(n)$ est de plus en plus petit. Tout cela produit un argument fort en faveur de la conjecture de Guy et Selfridge.

CROISSANCE RÉPÉTÉE

Une autre piste consiste simplement à tenter la construction explicite d'un entier dont on démontrerait qu'il engendre une suite aliquote tendant vers l'infini. Erdős a publié en 1976 une preuve, due au Néerlandais Hendrik Lenstra, que pour tout entier positif k, il existe des suites aliquotes croissantes pendant k étapes successives.

De son côté, Jean-Luc Garambois a formulé la conjecture que, pour tout k et pour tout C positif, il existe des entiers n tels que la suite aliquote partant de n est croissante d'un facteur C au moins à chaque étape, $s(n) \geq Cn$, et cela pendant k étapes au moins. Mieux: Razvan Barbulescu, qui est aujourd'hui à Sorbonne Université, a réussi en 2012 à démontrer la conjecture, ce qui en fait un théorème.

Puisqu'une suite aliquote monte parfois très vite et très longtemps, il ne serait pas surprenant qu'il existe des suites montant indéfiniment et donc correspondant au cas 6. Cela semble presque aller de soi quand on observe les représentations graphiques de certaines suites aliquotes (*voir l'encadré 3, schéma E*), mais en mathématiques, il ne suffit pas de voir et d'être persuadé soi-même, il faut démontrer!

Jean-Luc Garambois propose aussi sur son site un entier n tel que la suite aliquote partant de n est croissante pendant des millions d'étapes, chacun de ses 800 premiers termes ayant plus de 40 millions de chiffres (voir www.aliquotes.com/suite_termes_taille_record.html).

Les idées envisagées pour tenter de construire des suites aliquotes dont on démontrerait qu'elles sont indéfiniment croissantes deviennent de plus en plus précises; le mystère du cas 6 est peut-être en passe d'être résolu. Si c'était en partant d'idées proposées par un amateur passionné, ce serait remarquable.

D'autres questions concernant les antécédents aliquotes, les nombres inatteignables, la structure du graphe général des suites aliquotes se posent et sont très sérieusement étudiées. Elles associent, comme pour le travail sur la conjecture de Catalan, raisonnements mathématiques experts et calculs informatiques.

Si vous ne savez pas quoi faire de la puissance de votre ordinateur, rejoignez la famille des passionnées de ces problèmes et mettez votre machine au service d'une de ces questions résolument mystérieuses sur lesquelles l'humanité se penche depuis plus de deux millénaires. ■

BIBLIOGRAPHIE

C. Pomerance, **The Aliquot constant, after Bosma and Kane**, *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 69(3), pp. 915-930, 2018.

K. Chum *et al.*, **Numerical and statistical analysis of aliquot sequences**, *Experimental Mathematics*, en ligne le 18 juin 2018.

A. Booker, *Finite connected components of the aliquot graph*, **Mathematics of Computation**, vol. 87, pp. 2891-2902, 2018.

W. Bosma et B. Kane, **The Aliquot constant**, *Quart. J. Math.*, vol. 63, pp. 309-323, 2012.

F. Luca et C. Pomerance, **The range of the sum-of-proper-divisors function**, *Acta Arithmetica*, vol. 168, pp. 187-199, 2015.

L'AUTEUR

LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint à *Pour la Science*

LA BALEINE BLEUE CHERCHE ENCORE DE L'EAU

Avec ses baleines monumentales, l'artiste japonaise Maki Ohkojima nous invite à repenser nos liens avec le vivant et nous alerte sur les dangers que nous courons à les oublier.

© Maki Ohkojima / Aquarium de Paris

En 1973, le chanteur américain Steve Waring mettait en scène dans l'une de ses chansons une baleine bleue aux prises avec la pollution. Rappelez-vous : « Elle a trouvé du DDT / Un pétrolier / Du détergent / Beaucoup de choses / Mais pas de l'eau. » L'artiste japonaise Maki Ohkojima a également eu recours aux cétacés pour alerter sur l'état du monde.

À l'occasion d'une carte blanche proposée par l'Aquarium de Paris, elle a installé *L'Œil de la baleine*, une fresque géante de 300 mètres carrés où s'ébattent cinq baleines (*voir ci-contre*). L'objectif : sensibiliser l'opinion sur les océans en péril et les dégâts causés par l'espèce humaine.

L'œuvre est le fruit d'un séjour à bord de la goélette scientifique *Tara*, lors d'une résidence d'artiste organisée par la fondation Tara Expéditions soutenue par la créatrice Agnès B. Pendant son périple d'un mois autour de l'archipel nippon, Maki Ohkojima s'est nourrie de conversations avec les scientifiques embarqués pour s'initier au fonctionnement des multiples écosystèmes marins.

L'un des cétacés a été peint directement sur le mur. Les quatre autres ont été conçus à Awa-Shima, une petite île de l'est du Japon, avec l'aide des villageois qui ont participé à la broderie et à la couture de différents éléments de *L'Œil de la baleine*. L'essentiel est constitué de cuir peint à l'acrylique, tandis que des objets incongrus, comme des plumes de paon, parachèvent l'ensemble. Chaque œuvre, monumentale, est en fin de compte l'assemblage d'une multitude de petits détails donnant au tout une éclatante richesse visuelle qui peut rappeler les compositions grouillantes d'un autre artiste japonais, Takashi Murakami.

Sur l'une des baleines, du corail, un organisme symbiotique associant animal et végétal, évoque le fonctionnement de l'océan tout entier fondé sur des cycles mettant en scène les deux règnes. De même, une baleine morte devient un écosystème à part entière pour d'autres organismes qui en extirpent l'énergie : poissons nécrophages, mollusques, vers, crustacés… « Le 6 février 2017, se souvient Maki Ohkojima, j'ai vu des baleines dans les flots. L'une était morte et de nombreuses créatures (oiseaux marins, requins…) venaient dévorer son corps. C'était pour moi un symbole. »

Un autre cétacé a le ventre empli de bouts de plastiques récupérés par l'artiste elle-même lors de promenades quotidiennes sur une plage. Sur une nageoire, de nombreux organismes illustrent la diversité des formes planctoniques. Eux aussi sont victimes de nos déchets. Ils se nourrissent de microplastiques et les transmettent à toute la chaîne alimentaire, des poissons jusqu'aux humains.

Sur la troisième baleine, plancton toujours. Disposé autour de la tête d'un petit garçon, il le « protège » des représentations d'essais nucléaires et de la bombe Little Boy (« petit garçon » en français) larguée sur Hiroshima. L'avenir de la planète dépendrait de ce plancton.

À côté, une dernière baleine montre l'unité du vivant. L'oxygène que nous respirons a été en partie produit par des microorganismes il y a plusieurs millions d'années. Le pétrole dont nous dépendons tant résulte de la transformation de matières organiques enfouies profondément par d'autres microorganismes. Selon l'artiste, nous devrions avoir plus conscience de ce qui nous unit à notre environnement. Ici, des papillons migrateurs, là la structure en double hélice de l'ADN illustrent ces liens et cette unité. Nous sommes tous les rouages d'un vaste écosystème à protéger. Aidons la baleine bleue à déboucher tous ses tuyaux ! ■

Le site de Maki Ohkojima : www.ohkojima.com

L'auteur a récemment publié : **Pollock, Turner, Van Gogh, Vermeer et la science…** (Belin 2018)

LES AUTEURS

JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

L'ASCENSION DE LA CHAÎNE FONTAINE

Une longue chaînette glissant hors d'un bocal suspendu au-dessus du sol se soulève spontanément. Le phénomène a intrigué les physiciens, qui ont fini par le comprendre.

En 2013, une vidéo de Steve Mould, un présentateur anglais d'émissions scientifiques, est devenue rapidement virale. Qu'y voit-on? Une longue chaînette quitte un récipient surélevé pour s'écouler vers le sol; très vite, elle s'élève au-dessus du bord du récipient sans le toucher, au lieu de glisser contre lui comme le fait une simple corde (*voir la figure ci-contre*). Ce phénomène inattendu a provoqué la surprise du public… et interrogé les physiciens: d'où provient la force qui fait monter la chaînette?

UNE POUSSÉE INATTENDUE EXERCÉE PAR LE RÉCIPIENT

La réponse est troublante: c'est le récipient, pourtant immobile, qui projette la chaînette vers le haut! Comme nous le verrons, la vidéo d'une brique de bois propulsée vers le haut grâce à un tir de carabine confirme cette explication et permet de mieux saisir les mécanismes à l'œuvre.

Cherchons d'abord à reproduire l'expérience avec la chaînette. Les premiers résultats ont été obtenus avec des chaînettes en métal, semblables à celles qui retiennent les bondes d'évier.

Dans ce cas, de petites boules métalliques sont reliées entre elles par de petites tiges. L'ensemble de la chaîne reste souple, même si les segments qui la constituent sont parfaitement rigides. On place la chaîne dans un bocal et l'on fait pendre l'une de ses extrémités par-delà le bord, avec assez de longueur pour que la chaîne soit entraînée progressivement hors du récipient sous l'effet de son propre poids.

Après quelques instants, et notamment après que l'extrémité a touché le sol, un «régime permanent» s'établit: la chaîne s'élève au-dessus du récipient en formant une arche et quitte le bocal à vitesse constante. La force motrice de ce phénomène est le poids de la partie de la chaîne qui se trouve en l'air entre le bocal et le sol. Elle est donc constante et d'autant plus grande que le bocal est surélevé.

On constate ainsi que plus on soulève le bocal, plus la chaîne le quitte rapidement et plus la hauteur de l'arche est importante, selon une loi grossièrement proportionnelle. De plus, lorsqu'on incline le récipient, la chaîne s'échappe non plus selon la verticale, mais en faisant un angle par rapport à l'horizontale.

Effectuons un premier bilan des forces en jeu lorsque le dispositif est en