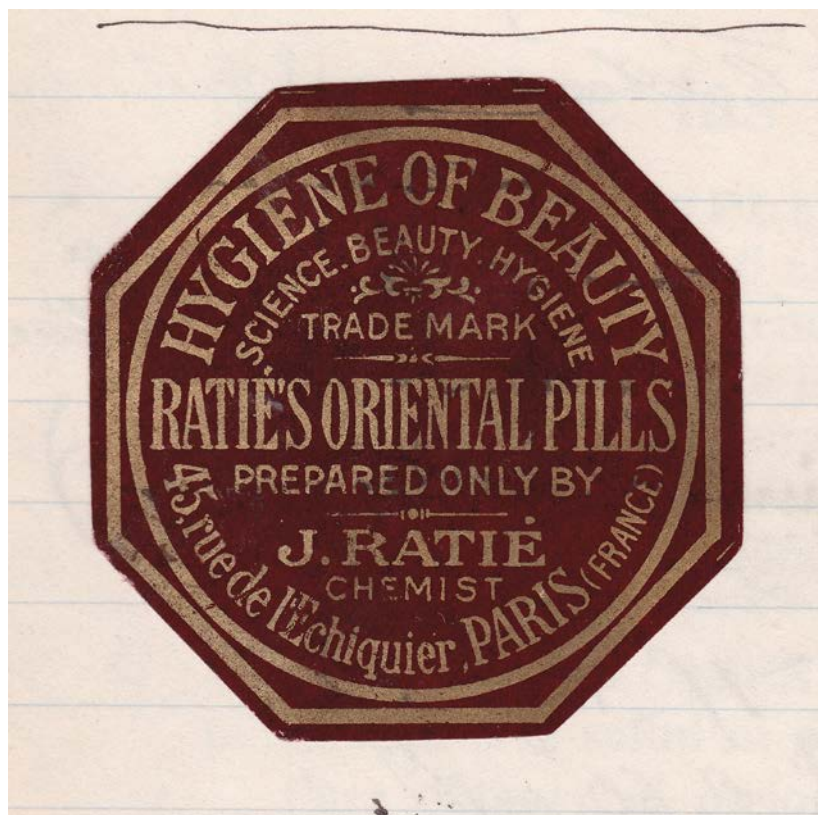




Dès les années 1900, les Pilules Orientales conquièrent de nombreux marchés en Europe et jusque sur le continent américain. Ci-dessus une étiquette anglaise vers 1930.

conscience du problème que posait le foisonnement des produits de santé. En 1925, on en comptait quelque 100 000 en France (médicaments, produits d'hygiène, accessoires, etc.), dont près de 20 000 spécialités pharmaceutiques, – les unes « commerciales » (comme les Pilules Orientales), les autres strictement « médicales », comme l'Eranol, un autre produit phare de l'entreprise, celui-là à base d'iode colloïdal. L'Eranol était en effet considéré comme un vrai médicament, indiqué pour traiter de réelles pathologies et non pour résoudre des désordres mineurs de l'apparence physique : « trouble de la croissance, lymphatisme, scrofule, pléthore, hypertension, artériosclérose, emphysème pulmonaire, rhumatismes chroniques, mycoses, sclérose auriculaire, infections aiguës, grippe, obésité, insuffisances thyroïdiennes, goitre, syphilis tertiaire, tuberculoses torpides, dermatoses et toutes les indications de l'iode », selon le prospectus qui l'accompagnait.

Les Pilules Orientales ne souffrirent pas trop de cette reprise en main, entre autres grâce à l'un des fils de Jules Ratié, Raymond, qui avait à son tour obtenu le diplôme de pharmacie. Il bénéficiait à la fois de l'énergie de sa jeunesse et d'une bonne connaissance des nouvelles pratiques pharmaceutiques. Ainsi, en juin 1931, les Pilules Orientales reçurent sans difficulté l'agrément du Laboratoire national de contrôle des médicaments, créé quelques

années plus tôt pour exercer un contrôle sur la profession. En revanche, le laboratoire ne sollicita évidemment pas un remboursement par les Assurances sociales, les ancêtres de l'Assurance maladie, nées en 1930, dans la mesure où il s'agissait de ce que nous appellerions de nos jours un « produit de confort ». En revanche, les deux formes de l'Eranol (gouttes et ampoules) en bénéficièrent.

UNE RUDE CONCURRENCE

Après la Seconde Guerre mondiale, le prestige des Pilules Orientales déclina rapidement. Il faut dire que les méthodes prétendant modifier l'apparence du buste foisonnaient : les unes mécaniques et pittoresques, mais très certainement inefficaces comme le Super-Massosein Roto-Star, commercialisé par la société lyonnaise Adams et Cie, ou le Super-Seins 33 des laboratoires Samep, censé procurer « un galbe et une fermeté idéale » ; les autres sans doute plus efficaces, mais parfois risquées comme les injections locales d'hormones féminines ou la chirurgie esthétique. Récemment encore, l'affaire des prothèses mammaires PIP (Poly Implant Prothèse), dont de nombreux exemplaires se sont révélés défectueux dans les années 2000 à cause de l'utilisation d'un gel non conforme à la place du gel de silicone classique, a démontré qu'aucune de ces pratiques n'est sans risque.

L'entreprise Ratié demeura familiale pendant plus d'un demi-siècle. Après le décès de Jules en 1952, son fils Raymond lui succéda. Il perdit finalement le contrôle de la société en 1956 et céda la concession des Pilules Orientales aux laboratoires Odilia en 1960. Ceux-ci les exploitèrent encore pendant une dizaine d'années, jusqu'à leur absorption par les laboratoires Thépenier, en 1971. Deux ans plus tard, les ventes des Pilules Orientales s'avérant décevantes, les laboratoires Thépenier arrêterent l'exploitation de cette spécialité presque nonagenaire. Quant à l'Eranol, il fut retiré du marché en 1967.

L'histoire médicale du galéga, l'ingrédient phare des Pilules Orientales, n'était cependant pas terminée pour autant. La recherche des produits chimiques qu'il contenait a révélé la présence de plusieurs substances aux vertus thérapeutiques. Parmi elles, le pharmacien et spécialiste de chimie végétale Georges Tanret a isolé en 1914 un alcaloïde nouveau, la galéguine, qui s'est révélée un puissant hypoglycémiant. Celle-ci est toujours extraite du galéga pour fabriquer des médicaments contre le diabète. D'autres études ont par ailleurs montré, dans les années 1960, la présence, dans le galéga, de principes actifs aux propriétés œstrogéniques, donc sources d'une activité potentielle sur les glandes mammaires... ■

BIBLIOGRAPHIE

C. Raynal et T. Lefebvre, **L'Épopée des Pilules Orientales**, Le Square Éditeur, 2018.

M. del Carmen Francés Causapé et al., **Los Medicamentos del farmacéutico francés Jules Antoine Ratié**, Realigraf, 2016.

R

ENDEZ-VOUS

P.78 Logique & calcul
P.84 Idées de physique
P.88 Chroniques de l'évolution
P.92 Science & gastronomie
P.94 À picorer

LES MATHS AU PÉRIL DE LA CONTRADICTION

Risque-t-on de trouver au cœur des mathématiques une contradiction qui obligerait à tout revoir? Telle était la crainte de l'éminent mathématicien américain Edward Nelson.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au Centre
de recherche en
informatique, signal
et automatique de Lille
(Cristal)



Jean-Paul Delahaye a récemment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

En 2006, Edward Nelson, qui était professeur au département de mathématiques de l'université de Princeton, aux États-Unis, fit circuler le texte d'une conférence intitulée « Warning signs of a possible collapse of contemporary mathematics » (« Signes inquiétants d'un effondrement possible des mathématiques contemporaines »). Il y indiquait trois points qui le persuadaient qu'un problème grave allait survenir au cœur de la reine des sciences.

Voyons le premier. Certaines contradictions trouvées en théorie des ensembles au début du xx^e siècle avaient été éliminées par une axiomatisation artificielle qui empêche, par exemple, de considérer l'ensemble de tous les ensembles. Cette solution axiomatique joue son rôle : la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZFC), la forme encore aujourd'hui en vigueur de cette « réparation », n'engendre pas la moindre contradiction, semble-t-il. La théorie ZFC n'est cependant pas celle de Georg Cantor et de Gottlob Frege, qui avaient découvert la théorie des ensembles, ce cadre puissant permettant l'épanouissement des mathématiques modernes. Pour Nelson, cette impossibilité d'exprimer l'intuition initiale des ensembles était une première alarme.

Son deuxième sujet d'inquiétude était le second théorème d'incomplétude de Gödel, selon lequel une théorie ne peut pas prouver sa propre non-contradiction... On ne peut ainsi pas prouver la non-contradiction des théories mathématiques de base, comme l'arithmétique,

et cela suggérerait que ces théories sont contradictoires.

Le troisième indice de l'imminence d'une catastrophe en mathématiques était que nos théories permettent trop aisément de créer des nombres entiers tellement grands qu'ils n'ont plus aucun sens, et cela en particulier à cause de l'opération d'exponentiation, dont Nelson montrait qu'elle introduit des difficultés qu'il n'y a pas si l'on n'utilise que l'addition et la multiplication.

Nelson était un mathématicien éminent et respecté, qui a travaillé sur des sujets variés dont la théorie du mouvement brownien et les fondements des probabilités. Son inquiétude, même si elle a étonné, a jeté un trouble.

La situation s'est aggravée quand Nelson a publié en 2011 la première version d'un livre intitulé *Elements*, démarrant par : « Le but de ce travail est de prouver que les mathématiques contemporaines, en particulier l'arithmétique de Peano, sont contradictoires, puis de poser des fondations solides pour les mathématiques, et de commencer à bâtir sur ces fondations. »

L'ARITHMÉTIQUE, CONTRADICTOIRE?

Une théorie est contradictoire si elle permet, pour un énoncé E , de démontrer à la fois E et sa négation $\text{non-}E$. S'il y a une seule contradiction (E et $\text{non-}E$) dans une théorie, alors tous les énoncés qui ont un sens dans la théorie sont démontrables (voir l'encadré 4). Lorsqu'une théorie mathématique est contradictoire, tout y est à la fois faux et vrai : elle n'a donc aucun intérêt !

L'arithmétique de Peano auquel se référait Nelson est une théorie axiomatique des nombres entiers. Parmi ses axiomes, il y a celui du raisonnement par récurrence qui affirme : *Si une propriété $P(n)$ est vraie pour l'entier 0, et si, pour tout entier n , $P(n)$ entraîne $P(n+1)$, alors pour tout entier n , $P(n)$ est vraie.*

L'arithmétique de Peano démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers. Elle permet aussi d'établir indirectement tout ce que l'on considère comme vrai des ensembles finis, par exemple que l'ensemble des parties d'un ensemble de n éléments contient 2^n éléments. L'arithmétique de Peano est l'outil de base pour développer toutes les mathématiques des structures finies.

La plupart des théories mathématiques permettent de répliquer les raisonnements de l'arithmétique de Peano, un noyau commun aux théories mathématiques. Trouver une contradiction dans l'arithmétique de Peano entraînerait qu'il n'existe pas de vérité mathématique !

OUF, NELSON S'EST TROMPÉ

La démonstration avancée par Nelson qu'il existe une contradiction dans l'arithmétique élémentaire est subtile et loin d'être élémentaire. Il utilise la notion de complexité de Kolmogorov, ainsi qu'une preuve du second théorème d'incomplétude de Gödel, proposée en 2010 par Shira Kritchman et Ran Raz.

Mais la démonstration de Nelson ne tient pas. Il n'a pas vraiment trouvé d'énoncé mathématique E telle que l'arithmétique élémentaire prouve à la fois E et non E . Examinée par divers mathématiciens dont le célèbre Terence Tao, détenteur de la médaille Fields, un point douteux de la démonstration de Nelson a été rapidement identifié. Il s'est révélé impossible à corriger. Nelson en a convenu. Temporairement, puisqu'en 2013, il proposa une nouvelle version de sa preuve... qui, heureusement, était de nouveau insatisfaisante, ce qu'il a de nouveau reconnu. Nelson a bien repris son travail, mais il est décédé en 2014, apparemment sans aboutir.

«IL Y A JUSTE UN POINT OÙ J'AI RENCONTRÉ UNE DIFFICULTÉ»

L'ambition de Nelson de trouver une contradiction grave était-elle déraisonnable ? A-t-on déjà connu des situations où, tout à coup, au détour d'un raisonnement, on découvre qu'on vient de prouver la négation, non- E , d'un énoncé E qu'on avait démontré auparavant ?

Il se trouve que oui, et il est intéressant de revenir sur les moments où tout a vacillé. Aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, quand le calcul infini-tésimal a été introduit, ses règles de calcul peu sûres permettaient de démontrer assez facilement que $0=1$! Aussi Michel Rolle et George Berkeley pensaient-ils qu'il fallait l'abandonner. Mais les choses se sont arrangées au XIX^{e} siècle. ➤

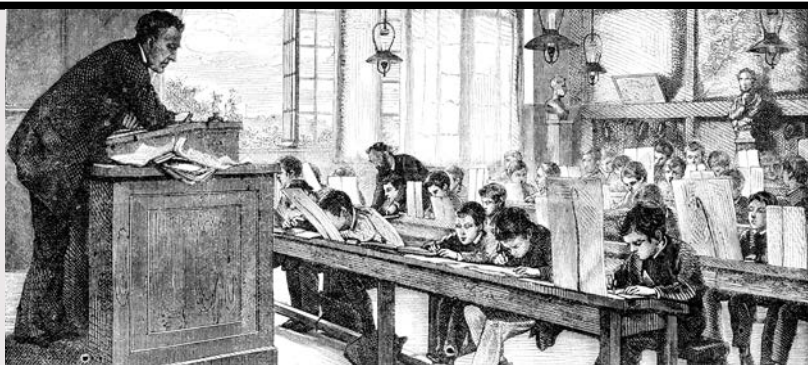
PARADOXES ET CONTRADICTIONS

1

Les mathématiciens s'intéressent aux paradoxes, car un paradoxe un peu modifié et transposé au sein d'une théorie peut devenir un outil de démonstration.

C'est le cas du paradoxe du menteur : si la phrase « Je mens » est vraie, alors ce que je dis en disant « Je mens » n'est pas vrai ; et si la phrase « Je mens » n'est pas vraie, alors je dis la vérité et la phrase « Je mens » est vraie. La version de cette phrase exprimée en théorie des nombres, « Je ne suis pas démontrable », est la clé du théorème d'incomplétude de Kurt Gödel, qui affirme que dans toute théorie assez riche et non contradictoire, on peut formuler des énoncés dont elle n'est capable de démontrer ni la vérité, ni la fausseté.

En 2010, un paradoxe qui n'avait jusque-là pas servi en mathématiques a été utilisé par Shira Kritchman et Ran Raz pour donner une nouvelle démonstration du second théorème d'incomplétude



de Gödel, selon lequel si une théorie est non contradictoire et assez puissante, alors elle est incapable de démontrer sa non-contradiction. Rappelons ce paradoxe auquel on laissera le lecteur réfléchir.

Le maître dit à sa classe : « Vous aurez une interrogation surprise la semaine prochaine, donc l'un des six jours entre lundi et samedi. » Les élèves raisonnent alors de la façon suivante : « L'interrogation ne peut pas avoir lieu samedi, car ce ne serait pas une

interrogation surprise. Arrivés vendredi matin, nous saurons donc que l'interrogation va avoir lieu. Elle ne peut donc pas survenir vendredi. De même, de proche en proche, elle ne peut avoir lieu ni jeudi, ni mercredi, ni mardi, ni lundi. » Le professeur donne son interrogation le mardi, et personne ne s'y attendait ; il a donc bien respecté sa promesse. Il y a là une contradiction avec le raisonnement des élèves, qui semble pourtant parfaitement correct.

2

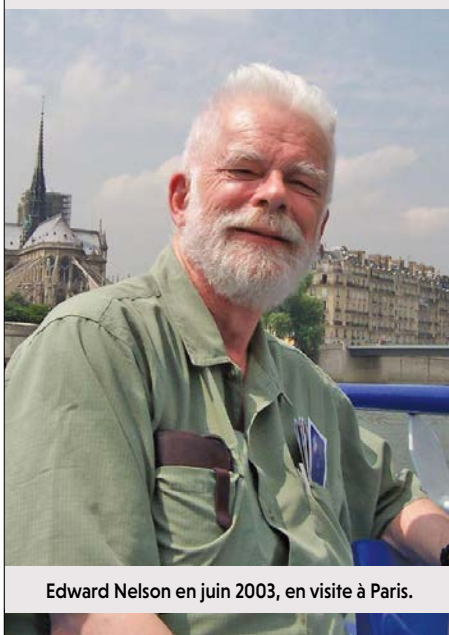
EDWARD NELSON,
L'ILLUSION DE L'INFINI DES NOMBRES

Edward Nelson (1932-2014) fut un mathématicien hors norme doté d'un esprit profond et original. Professeur à l'université de Princeton, il a travaillé en physique mathématique et proposa une version nouvelle de l'analyse non standard dénommée *Internal set theory*. En 2002, il expliquait comment il avait cessé de croire en l'existence des nombres (extrait de son texte *Mathematics and faith*) :

« Je dois raconter comment j'ai perdu ma foi en les nombres de Pythagore. Un matin de 1976, avant la réunion d'été de la Société américaine de mathématiques à Toronto, je me suis réveillé tôt. Tandis que je méditais sur les nombres, j'ai senti à un moment donné une présence accablante m'accusant d'arrogance, cela parce que je croyais en l'existence réelle d'un monde infini de nombres. Cela me laissa comme un bébé dans son berceau réduit à compter sur

ses doigts. Maintenant, je vis dans un monde où il n'y a pas de nombres, sauf ceux que les êtres humains construisent à l'occasion. La religion de Pythagore n'est plus pratiquée. Mais Pythagore a fortement influencé Platon, et nous-mêmes par son intermédiaire. Les nombres de Pythagore sont le type même des idées platoniciennes. [...] Sont-ils créés – contingents et sujets aux changements ? Sont-ils immuables et donc aujourd'hui comme ils l'étaient autrefois et pour toujours ? Ou s'agit-il de constructions de la pensée humaine qu'il est dangereux d'idolâtrer ? Pour nous autres hommes et femmes du monde de la recherche, réifier les idées abstraites, voire fonder la morale sur elles, est une tentation plus insidieuse et plus corruptrice que le serait le culte de statues de métal. »

Nelson défendait donc une conception prudente des mathématiques, qu'on nomme parfois formalisme : faire des mathématiques, c'est manipuler des symboles et des formules auxquels il ne faut pas accorder trop d'importance, et pour lesquels, surtout, il faut s'interdire d'imaginer qu'une réalité se cache derrière eux. La conception de Nelson le conduisit à penser que l'arithmétique élémentaire est contradictoire. Il passa la fin de sa vie à tenter de prouver que la théorie habituelle des nombres (l'axiomatique de Peano) ne tient pas debout. Il publia en 2011 une première version de sa démonstration, puis une seconde en 2013. Bien que très subtiles et menées avec soin, ces preuves se révélèrent incorrectes. Pour l'heure, personne n'a su trouver de contradiction dans la théorie des nombres, ni dans la théorie des ensembles telle qu'elle a été axiomatisée au début du xx^e siècle.



Edward Nelson en juin 2003, en visite à Paris.

> Le second exemple de contradiction considéré comme grave a déjà été évoqué : il concerne la théorie des ensembles. L'histoire est remarquable, car la contradiction est survenue brusquement. Gottlob Frege, qui venait de relire les épreuves d'un livre, reçoit une lettre aimable de Bertrand Russell datée du 16 juin 1902. Celui-ci exprime son accord avec la façon de procéder de Frege pour traiter la logique. Il ajoute cependant : « Il y a juste un point où j'ai rencontré une difficulté... », et lui présente le problème de l'ensemble E des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes. E appartient-il à lui-même ? En langage symbolique : $E = \{F \text{ tel que } F \notin F\}$. Est-ce que $E \in E$?

Si E appartient à E , $E \in E$, alors E n'a pas la propriété caractéristique des éléments de E ; donc E n'est pas élément de E , $E \notin E$. On a une contradiction.

Si E n'appartient pas à lui-même, $E \notin E$, alors il a la propriété caractéristique des éléments de E ; il est donc un élément de E : $E \in E$. On a encore une contradiction.

Ainsi, chacune des deux éventualités, $E \in E$ ou $E \notin E$, conduit à une contradiction.

On découvrit d'autres contradictions, dont celle concernant l'ensemble U de tous les ensembles. Chacune des parties (ou sous-ensembles) de U est un ensemble, donc un élément de U . Par conséquent, U a au moins autant d'éléments qu'il a de parties. Sa taille est donc au moins aussi grande que celle de l'ensemble de ses parties, ce qui entre en contradiction avec le résultat, dû à Cantor, que l'ensemble des parties d'un ensemble E est toujours de taille strictement supérieure à celle de E .

THÉORIE DES ENSEMBLES RÉPARÉE

Les mathématiciens du début du xx^e siècle ont su formuler une version axiomatique de la théorie des ensembles qui évite les contradictions en interdisant de considérer l'ensemble de tous les ensembles comme un véritable ensemble et en formulant diverses limitations sur ce qu'on peut définir comme ensemble. La théorie est débarrassée des contradictions, non pas parce qu'on démontre qu'il n'y en a pas, mais simplement parce qu'aujourd'hui personne n'a su proposer, pour un énoncé précis A , un raisonnement conduisant à A et un autre conduisant à non- A . Le cadre restrictif de l'axiomatique de ZFC, qui déplaisait à Nelson par ses aspects artificiels, fonctionne en pratique.

Cette remise sur pied de la théorie y restreint la liberté, mais pas d'une manière gênante pour les mathématiciens : ils s'y sentent au large et s'en satisfont, à de rares exceptions près.

D'autres situations dans l'histoire récente des mathématiques ont conduit à découvrir des contradictions dans des théories dont on aurait aimé pouvoir se servir sans risque, ce que

l'intuition qui leur donnait naissance laissait croire. Citons la logique combinatoire de Haskell Curry (1900-1982) et le lambda-calcul d'Alonzo Church (1903-1995), qui décrit un système de notations puissant pour les fonctions. Ces deux systèmes issus d'intuitions mathématiques, dont la fécondité et l'importance sont maintenant établies, conduisaient dans leur version initiale à des contradictions. C'est Stephen Kleene, un élève de Church (méfiez-vous de vos élèves...), qui découvrit en 1934, avec John Rosser, le pot aux roses. De nouveau, comme pour la théorie des ensembles, une légère restriction dans les systèmes a permis de les corriger et d'éviter, jusqu'à présent, qu'ils ne donnent des contradictions.

AJUSTEMENTS SUCCESSIFS

Un autre cas est celui du système logique de la «théorie constructive des types», devenu important en informatique, car il évite les situations où l'on prouve l'existence d'objets ayant une certaine propriété alors qu'on ne sait construire explicitement aucun objet ayant la propriété considérée. La première version de cette théorie, proposée en 1972 par le Suédois Per Martin-Löf, s'est révélée contradictoire,

obligeant là encore à corriger ce que l'intuition avait imaginé tenir debout.

Citons un dernier cas concernant les axiomes dits de «grands cardinaux», qui affirment l'existence d'ensembles très grands. Une multitude de principes ont été utilisés pour en définir, et il est admis que tout ce qui affirme que le monde mathématique est vaste doit être accepté: l'axiome de l'infini stipulant qu'il existe des ensembles infinis est le premier de cette catégorie. L'Américain Kenneth Kunen a cependant démontré en 1971 que ce maximalisme ensembliste n'est pas raisonnable au-delà d'un certain point, car certains axiomes de grands cardinaux, bien qu'aussi acceptables en apparence que d'autres, conduisent à une contradiction (en fait à une incompatibilité avec l'axiome du choix). Sans cette découverte, on aurait pu adopter une théorie des ensembles contradictoire.

Il faut noter que les cas que nous avons cités appartiennent tous à la même catégorie: on tente de formuler avec précision une théorie récente en cours d'élaboration en fixant ses axiomes; on la fait fonctionner; on découvre une contradiction; on ajuste; la contradiction disparaît.

>

DES INTUITIONS CONVERGENT ET SE RENFORCENT

3

Le second théorème d'incomplétude de Gödel indique que si un système non contradictoire est assez puissant pour mener les raisonnements arithmétiques habituels, alors ce système ne peut pas démontrer qu'il est non contradictoire.

Cela mit fin au projet de justifier l'usage de l'infini (comme la théorie des ensembles le permet) à l'aide d'une théorie qui ne l'utilise pas, ce qui était l'idée du programme de David Hilbert. Ce grand mathématicien souhaitait renforcer la confiance en l'usage de «l'infini actuel» (qui existe pleinement, maintenant) par opposition à «l'infini potentiel» (qui se construit petit à petit).

L'usage de l'infini actuel était devenu courant alors que les philosophes ont longtemps considéré qu'il fallait s'en méfier, et même le réserver à Dieu qui seul pouvait le comprendre. Hilbert rêvait de passer de la croyance très largement partagée que la théorie des nombres (sans infini actuel) est sans contradiction à l'affirmation que des théories plus fortes, telle la théorie des ensembles (avec infini actuel), le sont aussi. Le second théorème de Gödel montre que c'est impossible: une théorie ne pouvant justifier d'elle-même qu'elle est non contradictoire, elle ne peut *a fortiori* pas justifier la non-contradiction d'une théorie plus forte qu'elle.

Il faut cependant faire deux remarques. D'abord, qu'une théorie puisse démontrer sa propre non-contradiction n'est pas utile: une théorie contradictoire démontre tout ce qu'on veut, et donc aussi sa non-contradiction! De plus, si on peut démontrer qu'une théorie *S* fondée sur des axiomes très généraux et puissants (c'est le cas de l'arithmétique de

Peano) est non contradictoire en n'utilisant qu'une faible partie de ce que permet *S* et un autre principe de raisonnement s'appuyant sur l'intuition, on gagne quelque chose. C'est le cas de la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique par Gerhard Gentzen en 1936: elle met en œuvre un principe de raisonnement par récurrence un peu plus général que celui de l'arithmétique de Peano, mais est assez simple quand même. D'autres preuves de la non-contradiction de l'arithmétique ont aussi été formulées en se fondant sur des théories qui ne sont pas strictement plus faibles que celle de Peano (c'est impossible!), mais en ne mettant en action qu'un nombre limité de principes ou en n'utilisant que des concepts assez différents de ceux à la base de l'arithmétique de Peano.

On doit voir ces démonstrations comme des raisons cumulatives de croire que cette arithmétique est non contradictoire. Plusieurs cheminements de pensée, plusieurs bases différentes de concepts concourent à la conclusion que l'arithmétique de Peano n'est pas contradictoire; on doit en être rassuré.

Aujourd'hui, les fondements proposés par Vladimir Voevodsky ne permettent pas plus que les fondements ensemblistes habituels utilisant l'axiomatique ZFC d'être certain que notre façon de développer les mathématiques ne conduira pas à des contradictions; mais en adossant ces formalismes à d'autres intuitions de nature plus topologique, on renforce les raisons que nous avons de croire que les mathématiques n'aboutiront jamais à des contradictions.



Kurt Gödel (1906-1978)

- > On peut donc défendre que ces systèmes contradictoires sont apparus à propos d'idées que l'on n'avait pas encore bien testées, systèmes dont on n'a pas su mesurer immédiatement qu'ils étaient si puissants qu'ils donnaient des contradictions. En revanche, jamais une théorie bien installée, comme l'arithmétique de Peano, ne s'est trouvée dans cette situation.

Doit-on penser comme Nelson que cela n'est dû qu'à notre exploration insuffisante des systèmes que nous utilisons, et que si nous n'y prenons pas garde ils finiront par s'écrouler? Ou au contraire, doit-on, comme beaucoup de mathématiciens le soutiennent, affirmer que s'il y avait une contradiction possible dans les systèmes utilisés depuis longtemps, elle serait apparue, et donc que leur absence doit nous rassurer?

LA FÉCONDE INQUIÉTUDE DE VLADIMIR VOEVOVSKY

Un autre mathématicien prestigieux et détenteur de la médaille Fields, le Russe Vladimir Voevodsky (1966-2017), a craint aussi que les mathématiques ne soient pas assez bien protégées de la contradiction et de l'erreur. Il a par ailleurs défendu l'idée qu'il est devenu nécessaire de pratiquer les mathématiques d'une nouvelle façon.

Voevodsky était inquiet car son domaine de recherche, la géométrie algébrique, oblige à des démonstrations très longues et complexes, au point que plusieurs fois des erreurs se sont glissées dans des démonstrations et sont passées inaperçues durant des années. Lui-même a découvert, en retravaillant sur l'un de ses anciens articles, qu'il avait proposé une démonstration fautive. Après un gros travail, il a su

remettre sa preuve sur pied. Le plus inquiétant à propos de cette erreur est que plusieurs groupes de mathématiciens avaient travaillé en commun sur l'article erroné sans y repérer d'erreur. Il mentionna aussi le cas d'un article de son domaine où les chercheurs ont été obligés de remplacer un paragraphe faux de quelques lignes par trente pages, issues d'un effort des spécialistes s'étalant sur plus de cinq ans.

Voevodsky en était arrivé à la conclusion que dans sa spécialité, le système habituel de validation des démonstrations par les autres chercheurs du domaine n'était plus suffisant pour garantir la correction des travaux. Il écrivit: «Pour mener mon travail avec un niveau de rigueur et de précision que je pensais nécessaire, il aurait fallu un énorme effort de ma part et cela n'aurait produit que des textes très difficiles à lire. De plus, qui serait vraiment en mesure d'assurer que je n'ai rien oublié et que je n'ai laissé aucune erreur, puisque des erreurs relativement simples attendent des années avant d'être découvertes? Je pense que c'est à ce moment que j'ai arrêté de faire ce que j'appellais de la recherche conduite par la curiosité, et que je me suis mis à penser sérieusement au futur. Je n'avais pas les outils pour explorer ce vers quoi ma curiosité m'entraînait et que je considérais comme ayant de l'intérêt, de la valeur et de la beauté.»

Ses doutes sur la non-contradiction des théories habituelles, associés à son expérience avec les erreurs impossibles à maîtriser de son domaine de recherche, le conduisirent à imaginer une façon nouvelle d'écrire et de pratiquer les mathématiques. Pour reprendre le contrôle et assurer la rigueur des travaux mathématiques de son domaine, Voevodsky jugea indispensable que chaque point du développement d'une

LA CONTRADICTION UTILE : LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

4

Les mathématiciens évitent à tout prix les contradictions, sauf quand ils en utilisent la présence temporaire dans ce qu'on dénomme les « démonstrations par l'absurde ».

Rappelons-en le principe. Pour prouver une affirmation A, on commence par faire l'hypothèse inverse, non-A. On mène alors un raisonnement jusqu'à arriver à une contradiction, par exemple en démontrant A (le contraire de l'hypothèse faite). Le fait d'avoir obtenu une absurdité ne peut signifier qu'une chose : l'hypothèse initiale du raisonnement est fautive. Par conséquent, non-A est faux, donc A est vrai.

Par exemple, démontrons par cette méthode que « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Supposons le contraire, c'est-à-dire que « 36 est une puissance de 2 », donc que 36 est de la forme 2^n pour un certain entier n. En divisant par 2 chaque côté de l'égalité $36 = 2^n$, on obtient : $18 = 2^{n-1}$. On recommence : $9 = 2^{n-2}$. Nécessairement, $n - 2 \geq 1$, donc $9 = 2 \times 2^{n-3}$, où 2^{n-3} est un entier. Donc 9 est pair. C'est absurde.

On en tire la conclusion : « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Le raisonnement par l'absurde est très important en mathématiques. C'est par exemple lui que Georg Cantor a utilisé pour montrer que l'infini des nombres réels est strictement plus grand que l'infini des nombres entiers.

Le principe du raisonnement par l'absurde correspond à la formule logique :

$$(\text{non-A} \Rightarrow (\text{B et non-B})) \Rightarrow \text{A}$$

La crainte de la contradiction en mathématiques provient de la règle logique *ex falso quodlibet* : (B et non-B) $\Rightarrow$ A. Elle signifie que dès qu'une seule contradiction est obtenue, tout est vrai.

On peut démontrer la règle *ex falso quodlibet* de plusieurs façons, mais le raisonnement par l'absurde constitue la plus simple : Si on a (B et non-B), alors on a aussi (non-A) $\Rightarrow$ (B et non-B) (car, quand X est vrai, on a $Y \Rightarrow X$ pour tout Y). Donc, d'après la règle du raisonnement par l'absurde, A est vrai. On a ainsi établi que partant de (B et non-B), on obtenait A ; autrement dit, on a établi la règle *ex falso quodlibet*.

théorie, tant l'introduction de nouveaux objets que l'écriture des preuves, soit validé par un système informatique adapté. Des idées précises nouvelles sur la façon de mettre en œuvre cet objectif lui apparurent. Cela donna lieu à un programme de travail auquel il associa pendant un an une équipe de chercheurs réputés, dont le Français Thierry Coquant.

Le livre résultant de cette année de travail, *Homotopy Type Theory - Univalent Foundations of Mathematics*, est disponible gratuitement sur Internet (<https://homotopytypetheory.org/book/>). Il comporte une présentation de la logique particulière nécessaire au projet, la «théorie homotopique des types» (HoTT) et mène le développement d'une série de domaines mathématiques classiques et nouveaux en s'appuyant sur la nouvelle conception. Tout le contenu de l'ouvrage a été contrôlé par des outils informatiques.

La parution du livre a été saluée dans la communauté mathématique comme une révolution. Même si l'usage de cette méthode générale plus sûre pour faire des mathématiques n'a pour l'instant séduit qu'un petit nombre de chercheurs, l'approche proposée est vue comme une nouvelle façon de fonder et pratiquer des mathématiques. Se substituera-t-elle à la méthode habituelle s'appuyant sur la théorie des ensembles ou sur des systèmes mathématiques classiques tels que les axiomes de Peano? Il est probable qu'elle ne concernera dans un premier temps que les domaines les plus difficiles, comme celui à l'origine du projet de Voevodsky.

ASSISTANTS DE PREUVE

La méthode des assistants de preuve, des systèmes informatiques qui aident les mathématiciens à écrire tous les détails d'une démonstration et à les contrôler, a déjà obtenu de nombreux succès. Le système *Coq* développé en France par l'Inria (<https://coq.inria.fr>) est un tel système reconnu et utilisé dans de monde entier.

Les assistants de preuve ont permis la vérification définitive du théorème des quatre couleurs («Quatre couleurs suffisent pour colorier toute carte de façon que les pays frontaliers soient de couleur différente») et la confirmation, elle aussi définitive, de la justesse de la preuve de la conjecture de Kepler (relative au rangement optimal des sphères dans l'espace) par Thomas Hales. L'idée nouvelle est de changer définitivement la pratique mathématique, l'ordinateur et le mathématicien devenant associés comme deux frères siamois qui élaborent les mathématiques sans qu'il soit possible que des erreurs s'y glissent.

Cette nouvelle façon de faire des mathématiques ne résout cependant pas tous les problèmes de contradiction et d'erreur. Les assistants de preuve comme la méthode de

Voevodsky sont sujets à deux types de difficultés.

D'une part, le système logique qu'on programme dans l'assistant de preuve peut être contradictoire, auquel cas, avec l'accord de la machine, on arrivera à démontrer E et non-E. On ne s'interrogera pas sur la validité de la découverte d'une contradiction, mais il faudra quand même réparer le système. L'utilisation d'un tel outil aurait évité à Nelson son annonce injustifiée de la présence d'une contradiction en arithmétique, car sa prétendue découverte d'une contradiction n'aurait pas obtenu l'approbation de la machine.

PAS DE SOLUTION ULTIME

D'autre part, le programme de l'assistant de preuve peut comporter des bugs (erreurs de programmation). Bien sûr, tout est fait pour éviter cela. Parfois même, on vérifie la correction du programme de l'assistant de preuve avec un autre assistant de preuve. Pourtant, éliminer totalement le risque de bug est impossible, car même si le programme de l'assistant de preuve est parfait, ce qu'il produit dépend aussi du système d'exploitation des ordinateurs utilisés et des puces électroniques qui exécutent les calculs dans les niveaux profonds de la machine. Reste ainsi la possibilité que rien d'anormal n'apparaisse et que, silencieusement, un bug profond conduise à valider une preuve pourtant fausse. On diminue la probabilité que subsiste une erreur, mais on ne la réduit jamais à zéro.

Concernant la non-contradiction des systèmes tels que HoTT, des travaux récents de Michael Rathjen, de l'université de Leeds, en Grande-Bretagne, ont montré que ces systèmes sont «équi-consistants» à des systèmes logiques classiques. Cela signifie que les nouveaux systèmes produiront une contradiction si et seulement si les systèmes classiques équivalents en produisent.

Cette solidarité entre des systèmes anciens et les nouveaux est en définitive rassurante. Sans que cela soit une preuve de non-contradiction, cette force équivalente des systèmes s'appuyant sur des intuitions différentes rend de moins en moins probable que l'on trouve une contradiction dans l'un ou l'autre. Nelson a eu raison de rechercher des contradictions et raison de se tromper; cela nous rassure et s'ajoute aux autres motifs indirects que nous avons de croire que la façon dont nous pratiquons les mathématiques ne produira pas de contradictions. Que l'on utilise des assistants de preuve quand cela s'impose, ou que l'on continue à procéder comme autrefois par contrôles humains pour les domaines les plus simples, il ne semble pas en définitive que la reine des sciences soit sur le point de s'écrouler! ■

BIBLIOGRAPHIE

Documents divers sur Vladimir Voevodsky :
www.ias.edu/idea-tags/vladimir-voevodsky

T. Y. Chow, **The consistency of arithmetic**, *Math. Intelligencer*, 2018 (doi.org/10.1007/s00283-018-9837-z et <https://arxiv.org/pdf/1807.05641.pdf>).

A. Cantini et R. Bruni, **Paradoxes and contemporary logic**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2017 (<https://stanford.io/2RRpvGD>).

E. Nelson, **Elements**, prépublication, 2015. (<https://arxiv.org/abs/1510.00369>).

J. Hamkins et al., **Generalizations of the Kunen inconsistency**, *Ann. Pure Appl. Logic*, vol. 163(2), pp. 1872-1890, 2012.

E. Nelson, **Warning signs of a possible collapse of contemporary mathematics**, dans M. Heller et W. H. Woodin (éds.), *Infinity : New Research Frontiers*, Cambridge University Press, 2011 (<https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/warn.pdf>).

S. Kritchman et R. Raz, **The surprise examination paradox and the second incompleteness theorem**, *Notices of the AMS*, vol. 57, pp. 1454-1458, 2010.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

VOLS D'ARAIGNÉES AU-DESSUS DES OCÉANS

Certaines araignées tirent profit de forces électrostatiques pour décoller et s'envoler. Elles voyagent ensuite au gré des vents, parfois sur des distances considérables.

Quand naît une île volcanique au milieu d'un océan, les araignées sont en général les premiers arthropodes terrestres à la coloniser. Elles atteignent de tels lieux grâce à l'entraînement des vents et aux fils de plusieurs mètres de long qu'elles ont tissés pour s'envoler.

DARWIN EN A ÉTÉ TÉMOIN

Comment expliquer ce vol ? On pressent depuis longtemps que deux mécanismes physiques sont en jeu : les forces aérodynamiques exercées par l'air et les forces électrostatiques dues au champ électrique atmosphérique. Des travaux récents ont éclairci leurs rôles respectifs et précisé la contribution, essentielle, de l'électrostatique.

Pour mieux saisir le phénomène, plongeons-nous dans le journal de l'illustre Charles Darwin, témoin de ce

phénomène lors de son grand voyage à bord du *Beagle*, de 1831 à 1836. Darwin relate que par un jour calme et clair, alors que la côte de la terre la plus proche, l'Argentine, était distante d'une centaine de kilomètres, le navire fut soudainement envahi, par la voie des airs, d'araignées de taille comprise entre 2 et 7 millimètres.

Le naturaliste anglais observa surtout les conditions de leur envol : les araignées rejoignent les sommets des objets sur lesquels elles crapahutent, relèvent leur abdomen vers le ciel, éjectent des soies longues de 2 à 3 mètres et décollent alors selon l'horizontale avec une rapidité incroyable.

Darwin nota que la légère brise et la convection de l'air peuvent expliquer le fait que le fil de soie s'élève et interpréta l'écartement en éventail des différentes soies tissées par une même araignée par une répulsion électrostatique. Il avait tout bon : il avait clairement identifié les deux mécanismes physiques en jeu.

Certaines araignées peuvent décoller rapidement, après avoir gagné l'extrémité d'une feuille et émis des soies longues de plusieurs mètres. De tels envols donnent parfois lieu à des « pluies » d'araignées.



En effet, sans vent, point de voyage possible. On constate que les décollages ont lieu en général lors de légères brises, avec une vitesse du vent égale au plus à 3 mètres par seconde. À cause des turbulences atmosphériques, ces brises s'accompagnent de courants ascendants d'une fraction de mètre par seconde au niveau du sol.

Si l'on prend en compte le diamètre des soies, inférieur au micromètre (soit 100 fois moins qu'un cheveu), le nombre de Reynolds, qui exprime le rapport entre les forces d'entraînement dues au déplacement des masses d'air et les forces