

théorie, tant l'introduction de nouveaux objets que l'écriture des preuves, soit validé par un système informatique adapté. Des idées précises nouvelles sur la façon de mettre en œuvre cet objectif lui apparurent. Cela donna lieu à un programme de travail auquel il associa pendant un an une équipe de chercheurs réputés, dont le Français Thierry Coquant.

Le livre résultant de cette année de travail, *Homotopy Type Theory - Univalent Foundations of Mathematics*, est disponible gratuitement sur Internet (<https://homotopytypetheory.org/book/>). Il comporte une présentation de la logique particulière nécessaire au projet, la «théorie homotopique des types» (HoTT) et mène le développement d'une série de domaines mathématiques classiques et nouveaux en s'appuyant sur la nouvelle conception. Tout le contenu de l'ouvrage a été contrôlé par des outils informatiques.

La parution du livre a été saluée dans la communauté mathématique comme une révolution. Même si l'usage de cette méthode générale plus sûre pour faire des mathématiques n'a pour l'instant séduit qu'un petit nombre de chercheurs, l'approche proposée est vue comme une nouvelle façon de fonder et pratiquer des mathématiques. Se substituera-t-elle à la méthode habituelle s'appuyant sur la théorie des ensembles ou sur des systèmes mathématiques classiques tels que les axiomes de Peano? Il est probable qu'elle ne concernera dans un premier temps que les domaines les plus difficiles, comme celui à l'origine du projet de Voevodsky.

ASSISTANTS DE PREUVE

La méthode des assistants de preuve, des systèmes informatiques qui aident les mathématiciens à écrire tous les détails d'une démonstration et à les contrôler, a déjà obtenu de nombreux succès. Le système *Coq* développé en France par l'Inria (<https://coq.inria.fr>) est un tel système reconnu et utilisé dans de monde entier.

Les assistants de preuve ont permis la vérification définitive du théorème des quatre couleurs («Quatre couleurs suffisent pour colorier toute carte de façon que les pays frontaliers soient de couleur différente») et la confirmation, elle aussi définitive, de la justesse de la preuve de la conjecture de Kepler (relative au rangement optimal des sphères dans l'espace) par Thomas Hales. L'idée nouvelle est de changer définitivement la pratique mathématique, l'ordinateur et le mathématicien devenant associés comme deux frères siamois qui élaborent les mathématiques sans qu'il soit possible que des erreurs s'y glissent.

Cette nouvelle façon de faire des mathématiques ne résout cependant pas tous les problèmes de contradiction et d'erreur. Les assistants de preuve comme la méthode de

Voevodsky sont sujets à deux types de difficultés.

D'une part, le système logique qu'on programme dans l'assistant de preuve peut être contradictoire, auquel cas, avec l'accord de la machine, on arrivera à démontrer E et non-E. On ne s'interrogera pas sur la validité de la découverte d'une contradiction, mais il faudra quand même réparer le système. L'utilisation d'un tel outil aurait évité à Nelson son annonce injustifiée de la présence d'une contradiction en arithmétique, car sa prétendue découverte d'une contradiction n'aurait pas obtenu l'approbation de la machine.

PAS DE SOLUTION ULTIME

D'autre part, le programme de l'assistant de preuve peut comporter des bugs (erreurs de programmation). Bien sûr, tout est fait pour éviter cela. Parfois même, on vérifie la correction du programme de l'assistant de preuve avec un autre assistant de preuve. Pourtant, éliminer totalement le risque de bug est impossible, car même si le programme de l'assistant de preuve est parfait, ce qu'il produit dépend aussi du système d'exploitation des ordinateurs utilisés et des puces électroniques qui exécutent les calculs dans les niveaux profonds de la machine. Reste ainsi la possibilité que rien d'anormal n'apparaisse et que, silencieusement, un bug profond conduise à valider une preuve pourtant fausse. On diminue la probabilité que subsiste une erreur, mais on ne la réduit jamais à zéro.

Concernant la non-contradiction des systèmes tels que HoTT, des travaux récents de Michael Rathjen, de l'université de Leeds, en Grande-Bretagne, ont montré que ces systèmes sont «équi-consistants» à des systèmes logiques classiques. Cela signifie que les nouveaux systèmes produiront une contradiction si et seulement si les systèmes classiques équivalents en produisent.

Cette solidarité entre des systèmes anciens et les nouveaux est en définitive rassurante. Sans que cela soit une preuve de non-contradiction, cette force équivalente des systèmes s'appuyant sur des intuitions différentes rend de moins en moins probable que l'on trouve une contradiction dans l'un ou l'autre. Nelson a eu raison de rechercher des contradictions et raison de se tromper; cela nous rassure et s'ajoute aux autres motifs indirects que nous avons de croire que la façon dont nous pratiquons les mathématiques ne produira pas de contradictions. Que l'on utilise des assistants de preuve quand cela s'impose, ou que l'on continue à procéder comme autrefois par contrôles humains pour les domaines les plus simples, il ne semble pas en définitive que la reine des sciences soit sur le point de s'écrouler! ■

BIBLIOGRAPHIE

Documents divers sur Vladimir Voevodsky :
www.ias.edu/idea-tags/vladimir-voevodsky

T. Y. Chow, **The consistency of arithmetic**, *Math. Intelligencer*, 2018 (doi.org/10.1007/s00283-018-9837-z et <https://arxiv.org/pdf/1807.05641.pdf>).

A. Cantini et R. Bruni, **Paradoxes and contemporary logic**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2017 (<https://stanford.io/2RRpvGD>).

E. Nelson, **Elements**, prépublication, 2015. (<https://arxiv.org/abs/1510.00369>).

J. Hamkins et al., **Generalizations of the Kunen inconsistency**, *Ann. Pure Appl. Logic*, vol. 163(2), pp. 1872-1890, 2012.

E. Nelson, **Warning signs of a possible collapse of contemporary mathematics**, dans M. Heller et W. H. Woodin (éds.), *Infinity : New Research Frontiers*, Cambridge University Press, 2011 (<https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/warn.pdf>).

S. Kritchman et R. Raz, **The surprise examination paradox and the second incompleteness theorem**, *Notices of the AMS*, vol. 57, pp. 1454-1458, 2010.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

VOLS D'ARAIGNÉES AU-DESSUS DES OCÉANS

Certaines araignées tirent profit de forces électrostatiques pour décoller et s'envoler. Elles voyagent ensuite au gré des vents, parfois sur des distances considérables.

Quand naît une île volcanique au milieu d'un océan, les araignées sont en général les premiers arthropodes terrestres à la coloniser. Elles atteignent de tels lieux grâce à l'entraînement des vents et aux fils de plusieurs mètres de long qu'elles ont tissés pour s'envoler.

DARWIN EN A ÉTÉ TÉMOIN

Comment expliquer ce vol ? On pressent depuis longtemps que deux mécanismes physiques sont en jeu : les forces aérodynamiques exercées par l'air et les forces électrostatiques dues au champ électrique atmosphérique. Des travaux récents ont éclairci leurs rôles respectifs et précisé la contribution, essentielle, de l'électrostatique.

Pour mieux saisir le phénomène, plongeons-nous dans le journal de l'illustre Charles Darwin, témoin de ce

phénomène lors de son grand voyage à bord du *Beagle*, de 1831 à 1836. Darwin relate que par un jour calme et clair, alors que la côte de la terre la plus proche, l'Argentine, était distante d'une centaine de kilomètres, le navire fut soudainement envahi, par la voie des airs, d'araignées de taille comprise entre 2 et 7 millimètres.

Le naturaliste anglais observa surtout les conditions de leur envol : les araignées rejoignent les sommets des objets sur lesquels elles crapahutent, relèvent leur abdomen vers le ciel, éjectent des soies longues de 2 à 3 mètres et décollent alors selon l'horizontale avec une rapidité incroyable.

Darwin nota que la légère brise et la convection de l'air peuvent expliquer le fait que le fil de soie s'élève et interpréta l'écartement en éventail des différentes soies tissées par une même araignée par une répulsion électrostatique. Il avait tout bon : il avait clairement identifié les deux mécanismes physiques en jeu.

Certaines araignées peuvent décoller rapidement, après avoir gagné l'extrémité d'une feuille et émis des soies longues de plusieurs mètres. De tels envols donnent parfois lieu à des « pluies » d'araignées.

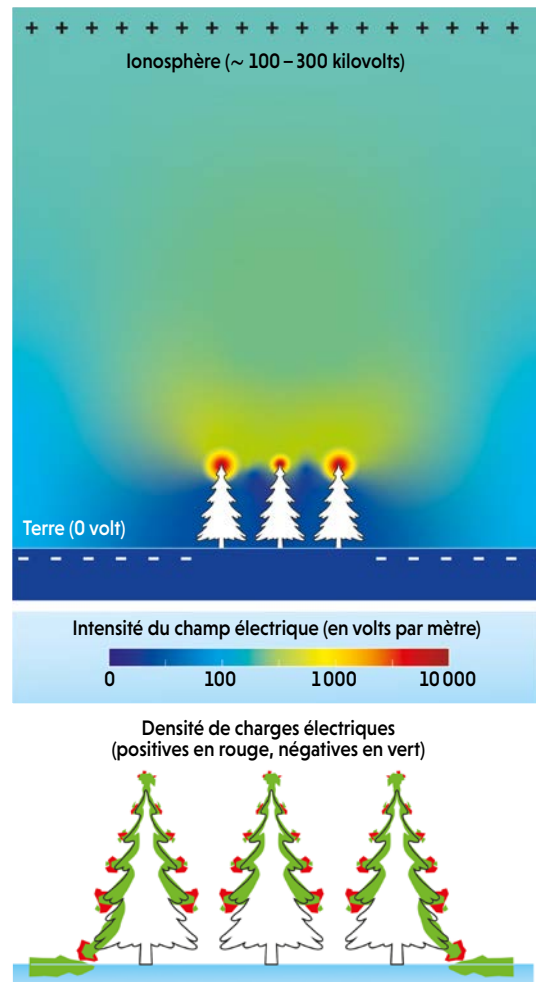


En effet, sans vent, point de voyage possible. On constate que les décollages ont lieu en général lors de légères brises, avec une vitesse du vent égale au plus à 3 mètres par seconde. À cause des turbulences atmosphériques, ces brises s'accompagnent de courants ascendants d'une fraction de mètre par seconde au niveau du sol.

Si l'on prend en compte le diamètre des soies, inférieur au micromètre (soit 100 fois moins qu'un cheveu), le nombre de Reynolds, qui exprime le rapport entre les forces d'entraînement dues au déplacement des masses d'air et les forces

ÉLECTRICITÉ ATMOSPHÉRIQUE

L'ionosphère, entre 60 et 100 kilomètres d'altitude, est une couche atmosphérique chargée positivement. Son potentiel électrique, par rapport au sol, est de l'ordre de 100 à 300 kilovolts. Il en résulte un champ électrique atmosphérique qui est maximal au niveau du sol aux environs d'une centaine de volts par mètre. Mais la présence d'objets tels que des arbres peut apporter à ce champ de fortes distorsions locales, surtout à leurs extrémités. C'est grâce à ces champs électriques relativement intenses, et aux densités de charges électriques assez élevées qui en résultent près des surfaces pointues, que les araignées décollent facilement de leur support et volent à des altitudes pouvant atteindre quelques kilomètres.



d'entraînement par viscosité, est de l'ordre de 0,01. C'est par conséquent la viscosité qui domine; la force correspondante est proportionnelle à la vitesse relative entre le fil et l'air et, très grossièrement, à la longueur de la soie. Avec une soie de 1 mètre et une vitesse ascendante de l'air égale à 0,1 mètre par seconde, la force est d'environ 1 micronewton, soit le poids de 0,1 milligramme. Quelques dizaines de soies suffisent dans ce cas à soulever les araignées les plus petites, de 5 milligrammes ou moins.

Certes, plus loin du sol, les vents ascendants sont un peu plus forts, et avec des

vitesses de quelques mètres par seconde, ils suffiront pour que des araignées pesant plusieurs dizaines de milligrammes restent en l'air sans tomber. Mais comment expliquer leur décollage? Et pourquoi les araignées de Darwin décollaient-elles à l'horizontale bien plus rapidement que la brise ambiante, ce qui est paradoxal?

DANS L'AIR ÉLECTRIQUE

La réponse à ces questions réside vraisemblablement dans l'électrostatique. Les phénomènes atmosphériques entretiennent en effet un champ électrique dans lequel nous baignons en

permanence. La foudre en est l'une des manifestations les plus spectaculaires; mais même par temps calme et clair, il règne un champ électrique. Son amplitude est de l'ordre de 120 volts par mètre au-dessus d'un champ labouré, plat et horizontal. Ce n'est cependant qu'une valeur moyenne et la présence d'une structure conductrice peut renforcer >

Les auteurs ont récemment publié:
En avant la physique !,
une sélection de leurs
chroniques (Belin, 2017).



> considérablement ce champ électrique par effet de pointe. Il en est ainsi des arbres : avec leur forte proportion d'eau et d'électrolytes, ils sont suffisamment conducteurs pour être au même potentiel électrique que le sol. Il en résulte l'accumulation de charges aux extrémités des branches et des feuilles, qui créent de forts champs électriques (*voir l'encadré page précédente*). Ainsi, à 10 mètres au-dessus du feuillage d'un arbre isolé haut de 35 mètres, on mesure des champs de 2 kilovolts par mètre, et au niveau du feuillage lui-même la dizaine de kilovolts par mètre.

Le champ électrostatique est donc bien présent dans l'environnement forestier où vivent les araignées. Mais ces bestioles et leurs soies sont-elles pour autant chargées ? On peut faire une première estimation de la charge des soies en observant leur éventail et en considérant l'effet de deux forces électrostatiques : d'une part, la force vers le haut due au champ électrique atmosphérique et proportionnelle à la charge de la soie, d'autre part la répulsion entre les soies, proportionnelle au carré de cette charge (le produit des charges de deux soies).

Lorsque la charge augmente, la répulsion entre soies croît plus vite que la force qui les aligne parallèlement et l'éventail des soies s'ouvre plus. Avec un angle observé de 1 radian (57 degrés) pour un éventail de 5 soies longues de 1 mètre soumis à un champ électrique de 120 volts par mètre, on calcule une charge totale de 1 nanocoulomb.

DES CHAMPS ÉLECTRIQUES INTENSES PAR ENDROITS

Cette charge permet-elle d'assurer la suspension en l'air de l'araignée ? Le champ électrique exerce sur elle une force de 0,1 micronewton, soit le poids d'une masse de 0,01 milligramme. Avec 100 soies, on atteint 0,2 milligrammes, toujours pour une centaine de volts par mètre.

Or au-dessus d'un arbre, le champ électrique est 10 à 100 fois plus intense que cette valeur. Il peut donc tout à fait soulever des araignées de plusieurs dizaines de milligrammes, si elles émettent plusieurs dizaines de soies de plusieurs mètres.

Dans ce cas, la charge des soies peut dépasser 10 nanocoulombs, ce qui est considérable pour un animal aussi petit. Les propriétés électriques de la soie (capacité, résistance) montrent cependant que cette charge est atteinte en quelques secondes (une durée compatible

LÉVITATION ÉLECTROSTATIQUE

Les forces électrostatiques permettent à des araignées de s'envoler, mais aussi de faire léviter des objets macroscopiques. Il existe ainsi un jouet constitué d'une baguette « magique » et d'une structure faite de bandes souples d'un matériau léger et conducteur, celle-ci étant mise en lévitation par la baguette. Le principe est simple : une pile permet de charger électriquement la baguette, que l'on met ensuite au contact de la structure ; celle-ci acquiert donc des charges électriques de même signe que la baguette. Grâce à la répulsion entre charges de même signe, la structure se déploie, tandis que la répulsion exercée par la baguette compense son poids.



avec les observations) sous des courants de quelques nanoampères et des tensions de quelques centaines de volts, valeurs qui ne présentent pas de danger pour l'arachnide.

Pour en revenir aux observations de Darwin, un calcul du champ électrique à bord d'un navire tel que le *Beagle* montre que la présence de parties conductrices verticales et hautes (telles que le mât) crée au niveau du bastingage un champ électrique horizontal 3 à 4 fois plus intense que le champ ambiant, soit plusieurs centaines de volts par mètre. La force électrostatique correspondante était donc à la fois importante et plutôt horizontale, d'où cette inattendue accélération des araignées au décollage, indépendante de la vitesse de la brise.

Comment être certain du rôle de l'électrostatique ? Il conviendrait de mesurer les charges portées par les araignées, mais cela semble très délicat. Alors Erica Morley et Daniel Robert, de l'université de Bristol, ont en quelque sorte interrogé les araignées elles-mêmes. Leurs expériences récentes ont révélé que quand un champ électrique assez fort apparaît, les araignées volantes émettent une ou plusieurs soies et dressent leur abdomen. Cette dernière position n'est adoptée par l'araignée que lorsqu'elle cherche à s'envoler. Autrement dit, les araignées sont bien sensibles au champ électrique et ne se préparent à l'envol que lorsque le champ est suffisant. ■

BIBLIOGRAPHIE

E. L. Morley et D. Robert, **Electric field elicit ballooning in spiders**, *Current Biology*, vol. 28, pp. 2324-2330, 2018.

D. Clarke et al., **The bee, the flower, and the electric field : electric ecology and aerial electroreception**, *Journal of Comparative Physiology A*, vol. 203, pp. 737-748, 2017.

P. W. Gorham, **Ballooning spiders : the case for electrostatic flight**, prépublication Arxiv, 2013 (<https://arxiv.org/pdf/1309.4731.pdf>).

