

l'intuition qui leur donnait naissance laissait croire. Citons la logique combinatoire de Haskell Curry (1900-1982) et le lambda-calcul d'Alonzo Church (1903-1995), qui décrit un système de notations puissant pour les fonctions. Ces deux systèmes issus d'intuitions mathématiques, dont la fécondité et l'importance sont maintenant établies, conduisaient dans leur version initiale à des contradictions. C'est Stephen Kleene, un élève de Church (méfiez-vous de vos élèves...), qui découvrit en 1934, avec John Rosser, le pot aux roses. De nouveau, comme pour la théorie des ensembles, une légère restriction dans les systèmes a permis de les corriger et d'éviter, jusqu'à présent, qu'ils ne donnent des contradictions.

AJUSTEMENTS SUCCESSIFS

Un autre cas est celui du système logique de la «théorie constructive des types», devenu important en informatique, car il évite les situations où l'on prouve l'existence d'objets ayant une certaine propriété alors qu'on ne sait construire explicitement aucun objet ayant la propriété considérée. La première version de cette théorie, proposée en 1972 par le Suédois Per Martin-Löf, s'est révélée contradictoire,

obligeant là encore à corriger ce que l'intuition avait imaginé tenir debout.

Citons un dernier cas concernant les axiomes dits de «grands cardinaux», qui affirment l'existence d'ensembles très grands. Une multitude de principes ont été utilisés pour en définir, et il est admis que tout ce qui affirme que le monde mathématique est vaste doit être accepté: l'axiome de l'infini stipulant qu'il existe des ensembles infinis est le premier de cette catégorie. L'Américain Kenneth Kunen a cependant démontré en 1971 que ce maximalisme ensembliste n'est pas raisonnable au-delà d'un certain point, car certains axiomes de grands cardinaux, bien qu'aussi acceptables en apparence que d'autres, conduisent à une contradiction (en fait à une incompatibilité avec l'axiome du choix). Sans cette découverte, on aurait pu adopter une théorie des ensembles contradictoire.

Il faut noter que les cas que nous avons cités appartiennent tous à la même catégorie: on tente de formuler avec précision une théorie récente en cours d'élaboration en fixant ses axiomes; on la fait fonctionner; on découvre une contradiction; on ajuste; la contradiction disparaît.

>

DES INTUITIONS CONVERGENT ET SE RENFORCENT

3

Le second théorème d'incomplétude de Gödel indique que si un système non contradictoire est assez puissant pour mener les raisonnements arithmétiques habituels, alors ce système ne peut pas démontrer qu'il est non contradictoire.

Cela mit fin au projet de justifier l'usage de l'infini (comme la théorie des ensembles le permet) à l'aide d'une théorie qui ne l'utilise pas, ce qui était l'idée du programme de David Hilbert. Ce grand mathématicien souhaitait renforcer la confiance en l'usage de «l'infini actuel» (qui existe pleinement, maintenant) par opposition à «l'infini potentiel» (qui se construit petit à petit).

L'usage de l'infini actuel était devenu courant alors que les philosophes ont longtemps considéré qu'il fallait s'en méfier, et même le réserver à Dieu qui seul pouvait le comprendre. Hilbert rêvait de passer de la croyance très largement partagée que la théorie des nombres (sans infini actuel) est sans contradiction à l'affirmation que des théories plus fortes, telle la théorie des ensembles (avec infini actuel), le sont aussi. Le second théorème de Gödel montre que c'est impossible: une théorie ne pouvant justifier d'elle-même qu'elle est non contradictoire, elle ne peut *a fortiori* pas justifier la non-contradiction d'une théorie plus forte qu'elle.

Il faut cependant faire deux remarques. D'abord, qu'une théorie puisse démontrer sa propre non-contradiction n'est pas utile: une théorie contradictoire démontre tout ce qu'on veut, et donc aussi sa non-contradiction! De plus, si on peut démontrer qu'une théorie *S* fondée sur des axiomes très généraux et puissants (c'est le cas de l'arithmétique de

Peano) est non contradictoire en n'utilisant qu'une faible partie de ce que permet *S* et un autre principe de raisonnement s'appuyant sur l'intuition, on gagne quelque chose. C'est le cas de la démonstration de la non-contradiction de l'arithmétique par Gerhard Gentzen en 1936: elle met en œuvre un principe de raisonnement par récurrence un peu plus général que celui de l'arithmétique de Peano, mais est assez simple quand même. D'autres preuves de la non-contradiction de l'arithmétique ont aussi été formulées en se fondant sur des théories qui ne sont pas strictement plus faibles que celle de Peano (c'est impossible!), mais en ne mettant en action qu'un nombre limité de principes ou en n'utilisant que des concepts assez différents de ceux à la base de l'arithmétique de Peano.

On doit voir ces démonstrations comme des raisons cumulatives de croire que cette arithmétique est non contradictoire. Plusieurs cheminements de pensée, plusieurs bases différentes de concepts concourent à la conclusion que l'arithmétique de Peano n'est pas contradictoire; on doit en être rassuré.

Aujourd'hui, les fondements proposés par Vladimir Voevodsky ne permettent pas plus que les fondements ensemblistes habituels utilisant l'axiomatique ZFC d'être certain que notre façon de développer les mathématiques ne conduira pas à des contradictions; mais en adossant ces formalismes à d'autres intuitions de nature plus topologique, on renforce les raisons que nous avons de croire que les mathématiques n'aboutiront jamais à des contradictions.



Kurt Gödel (1906-1978)

- > On peut donc défendre que ces systèmes contradictoires sont apparus à propos d'idées que l'on n'avait pas encore bien testées, systèmes dont on n'a pas su mesurer immédiatement qu'ils étaient si puissants qu'ils donnaient des contradictions. En revanche, jamais une théorie bien installée, comme l'arithmétique de Peano, ne s'est trouvée dans cette situation.

Doit-on penser comme Nelson que cela n'est dû qu'à notre exploration insuffisante des systèmes que nous utilisons, et que si nous n'y prenons pas garde ils finiront par s'écrouler? Ou au contraire, doit-on, comme beaucoup de mathématiciens le soutiennent, affirmer que s'il y avait une contradiction possible dans les systèmes utilisés depuis longtemps, elle serait apparue, et donc que leur absence doit nous rassurer?

LA FÉCONDE INQUIÉTUDE DE VLADIMIR VOEVOVSKY

Un autre mathématicien prestigieux et détenteur de la médaille Fields, le Russe Vladimir Voevodsky (1966-2017), a craint aussi que les mathématiques ne soient pas assez bien protégées de la contradiction et de l'erreur. Il a par ailleurs défendu l'idée qu'il est devenu nécessaire de pratiquer les mathématiques d'une nouvelle façon.

Voevodsky était inquiet car son domaine de recherche, la géométrie algébrique, oblige à des démonstrations très longues et complexes, au point que plusieurs fois des erreurs se sont glissées dans des démonstrations et sont passées inaperçues durant des années. Lui-même a découvert, en retravaillant sur l'un de ses anciens articles, qu'il avait proposé une démonstration fautive. Après un gros travail, il a su

remettre sa preuve sur pied. Le plus inquiétant à propos de cette erreur est que plusieurs groupes de mathématiciens avaient travaillé en commun sur l'article erroné sans y repérer d'erreur. Il mentionna aussi le cas d'un article de son domaine où les chercheurs ont été obligés de remplacer un paragraphe faux de quelques lignes par trente pages, issues d'un effort des spécialistes s'étalant sur plus de cinq ans.

Voevodsky en était arrivé à la conclusion que dans sa spécialité, le système habituel de validation des démonstrations par les autres chercheurs du domaine n'était plus suffisant pour garantir la correction des travaux. Il écrivit: «Pour mener mon travail avec un niveau de rigueur et de précision que je pensais nécessaire, il aurait fallu un énorme effort de ma part et cela n'aurait produit que des textes très difficiles à lire. De plus, qui serait vraiment en mesure d'assurer que je n'ai rien oublié et que je n'ai laissé aucune erreur, puisque des erreurs relativement simples attendent des années avant d'être découvertes? Je pense que c'est à ce moment que j'ai arrêté de faire ce que j'appelais de la recherche conduite par la curiosité, et que je me suis mis à penser sérieusement au futur. Je n'avais pas les outils pour explorer ce vers quoi ma curiosité m'entraînait et que je considérais comme ayant de l'intérêt, de la valeur et de la beauté.»

Ses doutes sur la non-contradiction des théories habituelles, associés à son expérience avec les erreurs impossibles à maîtriser de son domaine de recherche, le conduisirent à imaginer une façon nouvelle d'écrire et de pratiquer les mathématiques. Pour reprendre le contrôle et assurer la rigueur des travaux mathématiques de son domaine, Voevodsky jugea indispensable que chaque point du développement d'une

LA CONTRADICTION UTILE : LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

4

Les mathématiciens évitent à tout prix les contradictions, sauf quand ils en utilisent la présence temporaire dans ce qu'on dénomme les « démonstrations par l'absurde ».

Rappelons-en le principe. Pour prouver une affirmation A, on commence par faire l'hypothèse inverse, non-A. On mène alors un raisonnement jusqu'à arriver à une contradiction, par exemple en démontrant A (le contraire de l'hypothèse faite). Le fait d'avoir obtenu une absurdité ne peut signifier qu'une chose : l'hypothèse initiale du raisonnement est fautive. Par conséquent, non-A est faux, donc A est vrai.

Par exemple, démontrons par cette méthode que « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Supposons le contraire, c'est-à-dire que « 36 est une puissance de 2 », donc que 36 est de la forme 2^n pour un certain entier n. En divisant par 2 chaque côté de l'égalité $36 = 2^n$, on obtient : $18 = 2^{n-1}$. On recommence : $9 = 2^{n-2}$. Nécessairement, $n - 2 \geq 1$, donc $9 = 2 \times 2^{n-3}$, où 2^{n-3} est un entier. Donc 9 est pair. C'est absurde.

On en tire la conclusion : « 36 n'est pas une puissance de 2 ».

Le raisonnement par l'absurde est très important en mathématiques. C'est par exemple lui que Georg Cantor a utilisé pour montrer que l'infini des nombres réels est strictement plus grand que l'infini des nombres entiers.

Le principe du raisonnement par l'absurde correspond à la formule logique :

$$(\text{non-A} \Rightarrow (\text{B et non-B})) \Rightarrow \text{A}$$

La crainte de la contradiction en mathématiques provient de la règle logique *ex falso quodlibet* : (B et non-B) $\Rightarrow$ A. Elle signifie que dès qu'une seule contradiction est obtenue, tout est vrai.

On peut démontrer la règle *ex falso quodlibet* de plusieurs façons, mais le raisonnement par l'absurde constitue la plus simple : Si on a (B et non-B), alors on a aussi (non-A) $\Rightarrow$ (B et non-B) (car, quand X est vrai, on a $Y \Rightarrow X$ pour tout Y). Donc, d'après la règle du raisonnement par l'absurde, A est vrai. On a ainsi établi que partant de (B et non-B), on obtenait A ; autrement dit, on a établi la règle *ex falso quodlibet*.

théorie, tant l'introduction de nouveaux objets que l'écriture des preuves, soit validé par un système informatique adapté. Des idées précises nouvelles sur la façon de mettre en œuvre cet objectif lui apparurent. Cela donna lieu à un programme de travail auquel il associa pendant un an une équipe de chercheurs réputés, dont le Français Thierry Coquant.

Le livre résultant de cette année de travail, *Homotopy Type Theory - Univalent Foundations of Mathematics*, est disponible gratuitement sur Internet (<https://homotopytypetheory.org/book/>). Il comporte une présentation de la logique particulière nécessaire au projet, la «théorie homotopique des types» (HoTT) et mène le développement d'une série de domaines mathématiques classiques et nouveaux en s'appuyant sur la nouvelle conception. Tout le contenu de l'ouvrage a été contrôlé par des outils informatiques.

La parution du livre a été saluée dans la communauté mathématique comme une révolution. Même si l'usage de cette méthode générale plus sûre pour faire des mathématiques n'a pour l'instant séduit qu'un petit nombre de chercheurs, l'approche proposée est vue comme une nouvelle façon de fonder et pratiquer des mathématiques. Se substituera-t-elle à la méthode habituelle s'appuyant sur la théorie des ensembles ou sur des systèmes mathématiques classiques tels que les axiomes de Peano? Il est probable qu'elle ne concernera dans un premier temps que les domaines les plus difficiles, comme celui à l'origine du projet de Voevodsky.

ASSISTANTS DE PREUVE

La méthode des assistants de preuve, des systèmes informatiques qui aident les mathématiciens à écrire tous les détails d'une démonstration et à les contrôler, a déjà obtenu de nombreux succès. Le système *Coq* développé en France par l'Inria (<https://coq.inria.fr>) est un tel système reconnu et utilisé dans de monde entier.

Les assistants de preuve ont permis la vérification définitive du théorème des quatre couleurs («Quatre couleurs suffisent pour colorier toute carte de façon que les pays frontaliers soient de couleur différente») et la confirmation, elle aussi définitive, de la justesse de la preuve de la conjecture de Kepler (relative au rangement optimal des sphères dans l'espace) par Thomas Hales. L'idée nouvelle est de changer définitivement la pratique mathématique, l'ordinateur et le mathématicien devenant associés comme deux frères siamois qui élaborent les mathématiques sans qu'il soit possible que des erreurs s'y glissent.

Cette nouvelle façon de faire des mathématiques ne résout cependant pas tous les problèmes de contradiction et d'erreur. Les assistants de preuve comme la méthode de

Voevodsky sont sujets à deux types de difficultés.

D'une part, le système logique qu'on programme dans l'assistant de preuve peut être contradictoire, auquel cas, avec l'accord de la machine, on arrivera à démontrer E et non-E. On ne s'interrogera pas sur la validité de la découverte d'une contradiction, mais il faudra quand même réparer le système. L'utilisation d'un tel outil aurait évité à Nelson son annonce injustifiée de la présence d'une contradiction en arithmétique, car sa prétendue découverte d'une contradiction n'aurait pas obtenu l'approbation de la machine.

PAS DE SOLUTION ULTIME

D'autre part, le programme de l'assistant de preuve peut comporter des bugs (erreurs de programmation). Bien sûr, tout est fait pour éviter cela. Parfois même, on vérifie la correction du programme de l'assistant de preuve avec un autre assistant de preuve. Pourtant, éliminer totalement le risque de bug est impossible, car même si le programme de l'assistant de preuve est parfait, ce qu'il produit dépend aussi du système d'exploitation des ordinateurs utilisés et des puces électroniques qui exécutent les calculs dans les niveaux profonds de la machine. Reste ainsi la possibilité que rien d'anormal n'apparaisse et que, silencieusement, un bug profond conduise à valider une preuve pourtant fausse. On diminue la probabilité que subsiste une erreur, mais on ne la réduit jamais à zéro.

Concernant la non-contradiction des systèmes tels que HoTT, des travaux récents de Michael Rathjen, de l'université de Leeds, en Grande-Bretagne, ont montré que ces systèmes sont «équi-consistants» à des systèmes logiques classiques. Cela signifie que les nouveaux systèmes produiront une contradiction si et seulement si les systèmes classiques équivalents en produisent.

Cette solidarité entre des systèmes anciens et les nouveaux est en définitive rassurante. Sans que cela soit une preuve de non-contradiction, cette force équivalente des systèmes s'appuyant sur des intuitions différentes rend de moins en moins probable que l'on trouve une contradiction dans l'un ou l'autre. Nelson a eu raison de rechercher des contradictions et raison de se tromper; cela nous rassure et s'ajoute aux autres motifs indirects que nous avons de croire que la façon dont nous pratiquons les mathématiques ne produira pas de contradictions. Que l'on utilise des assistants de preuve quand cela s'impose, ou que l'on continue à procéder comme autrefois par contrôles humains pour les domaines les plus simples, il ne semble pas en définitive que la reine des sciences soit sur le point de s'écrouler! ■

BIBLIOGRAPHIE

Documents divers sur Vladimir Voevodsky :
www.ias.edu/idea-tags/vladimir-voevodsky

T. Y. Chow, **The consistency of arithmetic**, *Math. Intelligencer*, 2018 (doi.org/10.1007/s00283-018-9837-z et <https://arxiv.org/pdf/1807.05641.pdf>).

A. Cantini et R. Bruni, **Paradoxes and contemporary logic**, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, 2017 (<https://stanford.io/2RRpvGD>).

E. Nelson, **Elements**, prépublication, 2015. (<https://arxiv.org/abs/1510.00369>).

J. Hamkins et al., **Generalizations of the Kunen inconsistency**, *Ann. Pure Appl. Logic*, vol. 163(2), pp. 1872-1890, 2012.

E. Nelson, **Warning signs of a possible collapse of contemporary mathematics**, dans M. Heller et W. H. Woodin (éds.), *Infinity : New Research Frontiers*, Cambridge University Press, 2011 (<https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/warn.pdf>).

S. Kritchman et R. Raz, **The surprise examination paradox and the second incompleteness theorem**, *Notices of the AMS*, vol. 57, pp. 1454-1458, 2010.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

VOLS D'ARAIGNÉES AU-DESSUS DES OCÉANS

Certaines araignées tirent profit de forces électrostatiques pour décoller et s'envoler. Elles voyagent ensuite au gré des vents, parfois sur des distances considérables.

Quand naît une île volcanique au milieu d'un océan, les araignées sont en général les premiers arthropodes terrestres à la coloniser. Elles atteignent de tels lieux grâce à l'entraînement des vents et aux fils de plusieurs mètres de long qu'elles ont tissés pour s'envoler.

DARWIN EN A ÉTÉ TÉMOIN

Comment expliquer ce vol ? On pressent depuis longtemps que deux mécanismes physiques sont en jeu : les forces aérodynamiques exercées par l'air et les forces électrostatiques dues au champ électrique atmosphérique. Des travaux récents ont éclairci leurs rôles respectifs et précisé la contribution, essentielle, de l'électrostatique.

Pour mieux saisir le phénomène, plongeons-nous dans le journal de l'illustre Charles Darwin, témoin de ce

phénomène lors de son grand voyage à bord du *Beagle*, de 1831 à 1836. Darwin relate que par un jour calme et clair, alors que la côte de la terre la plus proche, l'Argentine, était distante d'une centaine de kilomètres, le navire fut soudainement envahi, par la voie des airs, d'araignées de taille comprise entre 2 et 7 millimètres.

Le naturaliste anglais observa surtout les conditions de leur envol : les araignées rejoignent les sommets des objets sur lesquels elles crapahutent, relèvent leur abdomen vers le ciel, éjectent des soies longues de 2 à 3 mètres et décollent alors selon l'horizontale avec une rapidité incroyable.

Darwin nota que la légère brise et la convection de l'air peuvent expliquer le fait que le fil de soie s'élève et interpréta l'écartement en éventail des différentes soies tissées par une même araignée par une répulsion électrostatique. Il avait tout bon : il avait clairement identifié les deux mécanismes physiques en jeu.

Certaines araignées peuvent décoller rapidement, après avoir gagné l'extrémité d'une feuille et émis des soies longues de plusieurs mètres. De tels envols donnent parfois lieu à des « pluies » d'araignées.



En effet, sans vent, point de voyage possible. On constate que les décollages ont lieu en général lors de légères brises, avec une vitesse du vent égale au plus à 3 mètres par seconde. À cause des turbulences atmosphériques, ces brises s'accompagnent de courants ascendants d'une fraction de mètre par seconde au niveau du sol.

Si l'on prend en compte le diamètre des soies, inférieur au micromètre (soit 100 fois moins qu'un cheveu), le nombre de Reynolds, qui exprime le rapport entre les forces d'entraînement dues au déplacement des masses d'air et les forces