

n^2 : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, ...

$3n^2$: 0, 3, 12, 27, 48, 75, 108, 147, 192, 243, 300, 363, 432, 507, 588, 675, 768, 867, 972, 1083, 1200, 1323, 1452, 1587, 1728, 1875, 2028, 2187, 2352, 2523, 2700, 2883, ...

$n^2 + p^2$: 2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 37, 40, 41, 45, 50, 52, 53, 58, 61, 65, 68, 72, 73, 74, 80, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100, 101, 104, 106, 109, 113, 116, ...

En les regroupant jusqu'à 100 (voir <https://oeis.org/A005792>): 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 27, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 48, 49, 50, 52, 53, 58, 61, 64, 65, 68, 72, 73, 74, 75, 80, 81, 82, 85, 89, 90, 97, 98, 100.

Le résultat pour $3n^2$ provient du découpage en n^2 de chacun des trois triangles de la figure C de l'encadré 2, découpage qui donne, comme on le souhaite, $3n^2$ triangles de même taille et semblables au grand triangle. Pour la série de nombres $n^2 + p^2$, il faut remarquer qu'un triangle rectangle T de côtés n et m peut être utilisé $n^2 + m^2$ fois pour composer un triangle rectangle semblable à T (voir les figures G, H, I de l'encadré 2).

Il faut bien noter que la partie positive du résultat est assez facile (on examine et on contrôle les constructions proposées), mais que ce n'est pas du tout le cas pour la partie négative (consistant à montrer qu'il n'existe aucun autre nombre pour lequel on puisse faire le pavage recherché), qui est sensiblement plus délicate.

POSSIBILITÉS ET IMPOSSIBILITÉS INATTENDUES

Le troisième problème (C) se révèle d'une incroyable difficulté, malgré quelques progrès récents. Rappelons qu'on se demande pour quelles valeurs de m il existe un triangle T pavable par m triangles T' identiques (on n'impose pas ici que T' soit semblable à T).

Ce qui est fascinant dans ce problème, c'est qu'on découvre aujourd'hui encore des pavages que personne n'avait repérés auparavant (voir l'encadré 3). Ainsi, le découpage en 6 est possible maintenant. Plus surprenant, le découpage en 28 est possible. Michael Beeson l'a découvert en utilisant un programme qui devait l'aider à démontrer que 28 n'était pas possible! Le découpage en 44 est aussi possible. Le découpage en $153 = 3^2 + 12^2$ était possible avant (comme somme de deux carrés), mais un pavage inattendu est apparu!

Deux résultats remarquables ont aussi été démontrés. Le premier indique que les valeurs $m=7$ et $m=11$ sont impossibles: aucun triangle ne peut être pavé par 7 ou 11 triangles identiques! N'est-il pas fascinant qu'une propriété générale aussi simple du triangle n'ait pas été

découverte ou même soupçonnée jusqu'à récemment? La plus simple des questions non résolues est la suivante. Existe-t-il des triangles pavables par 14 triangles identiques?

L'autre découverte récente de Michael Beeson est que le pavage du triangle équilatéral est impossible pour tout nombre premier au-delà de 3. On connaît aujourd'hui très mal l'ensemble des valeurs m pour lesquelles le pavage en triangles identiques du triangle équilatéral est possible.

TRIANGLES À CÔTÉS ENTIERS

Les triangles à côtés entiers – nous dirons «triangles entiers» – sont particulièrement élégants et sont à l'origine d'amuses questions associant géométrie et arithmétique. Notons d'abord qu'il résulte de l'inégalité triangulaire (la longueur d'un côté d'un triangle est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres) que tout triplet d'entiers positifs (a, b, c) tel que chaque somme de deux des trois entiers est inférieure au troisième détermine un triangle dont les côtés ont comme longueurs (a, b, c) .

La question du dénombrement de ces triangles entiers n'est pas simple. Le résultat proposé en 2000 par Tom Jenkins et Eric Mullers est le suivant: pour un périmètre donné n , le nombre de triangles entiers est l'entier le plus proche de $n^2/48$ si n est pair, et l'entier le plus proche de $(n+3)^2/48$ si n est impair.

Quand on découpe un triangle entier, peut-on le faire de façon à n'avoir que des sous-triangles entiers? Oui, c'est possible. L'encadré 4 donne notamment quatre exemples correspondant aux quatre découpages topologiquement différents d'un triangle en trois (les quatre dessins du haut). Pour chacune des 23 catégories de découpages d'un triangle en quatre de l'encadré 1, on peut trouver un découpage d'un triangle entier en triangles entiers qui en respecte le schéma. L'encadré 4 en donne quelques-uns (pour les autres, voir <http://mathworld.wolfram.com/TriangleDissection.html>).

Pour terminer, voici trois énoncés simples à propos des triangles entiers:

- Le seul triangle entier dont les longueurs des côtés et l'aire sont des entiers consécutifs est le triangle (3, 4, 5), dont l'aire est 6. Rappelons à ce sujet que l'aire A d'un triangle dont les côtés sont a, b, c est donnée par la formule de Héron:

$$A = (1/4)[(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)]^{1/2}.$$

- Le seul triangle entier ayant des entiers consécutifs pour ses côtés et l'une de ses hauteurs est le triangle (13, 14, 15) dont la hauteur à partir du côté 14 vaut 12.

- Les seuls triangles entiers dont l'aire est égale au périmètre sont ceux qui ont pour côtés (5, 12, 13), (6, 8, 10), (6, 25, 29), (7, 15, 20) et (9, 10, 17). ■

BIBLIOGRAPHIE

Article **Integer triangle** de Wikipedia, consulté en mars 2019.

Ed Pegg Jr., **Triangles** sur www.mathpuzzle.com/triangle.html, consulté en mars 2019.

M. Beeson, **No triangle can be cut into seven congruent triangles**, 2019 (<http://arxiv.org/abs/1811.09723v4>).

T. Jenkyns et E. Muller, **Triangular triples from ceilings to floors**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 107, pp. 634-639, 2000.

A. Soifer, **How Does One Cut a Triangle?**, Springer, 2009.

M. Laczkovich, **Tilings of triangles**, *Discrete Mathematics*, vol. 140, pp. 79-94, 1995.

S. L. Snover et al., **Rep-tiling for triangles**, *Discrete Mathematics*, vol. 91, pp. 193-200, 1991.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

DU NOIR PRESQUE PARFAIT

Pour qu'un objet apparaisse complètement noir, il ne suffit pas que le matériau dont il est fait absorbe la lumière. Sa surface doit aussi être structurée à l'échelle micrométrique ou nanométrique.

Comment obtenir du noir vraiment noir ? La question agite le milieu des arts depuis bien longtemps. Mais elle a connu récemment de multiples rebondissements à travers la querelle entre les artistes britanniques Stuart Semple et Anish Kapoor, lequel détient les droits exclusifs sur le Vantablack, substance artificielle réputée la plus sombre au monde. Cette question du noir profond concerne aussi les physiciens, qui cherchent à améliorer le rendement des cellules photovoltaïques ou à absorber les lumières parasites dans les télescopes. Or des progrès décisifs ont été réalisés ces dernières décennies – grâce à des revêtements structurés à des échelles spatiales de plus en plus petites.

Les noirs que nous rencontrons ne sont jamais totalement noirs : nous voyons les plis d'une chemise noire, la

forme des touches noires de nos claviers, etc., tout simplement parce que ces surfaces réfléchissent encore une partie de la lumière ambiante. Un objet parfaitement noir, que les physiciens appellent « corps noir », absorberait toute lumière qui lui parvient. Sa luminosité serait alors si faible qu'aucun détail n'en serait discernable : il serait impossible d'en distinguer la forme ou le volume.

ENTRE RÉFLEXION ET ABSORPTION

Pour qu'un corps s'approche de cet idéal, il faut donc qu'il réfléchisse le moins possible de lumière et, en même temps, qu'il absorbe la lumière afin d'être bien opaque.

Comment faire ? Les premiers noirs ont été réalisés à partir de pigments à base de charbon, de fumée – des composés à haute teneur en carbone – ou de graphite, dont sont faites les mines de

crayon. On comprend mieux aujourd'hui l'opacité de ces matériaux. Il y a une dizaine d'années, on a pu calculer l'absorption d'une couche de graphène, c'est-à-dire une couche cristalline d'épaisseur monoatomique constituée d'atomes de carbone liés en un réseau hexagonal (voir l'encadré page 90).

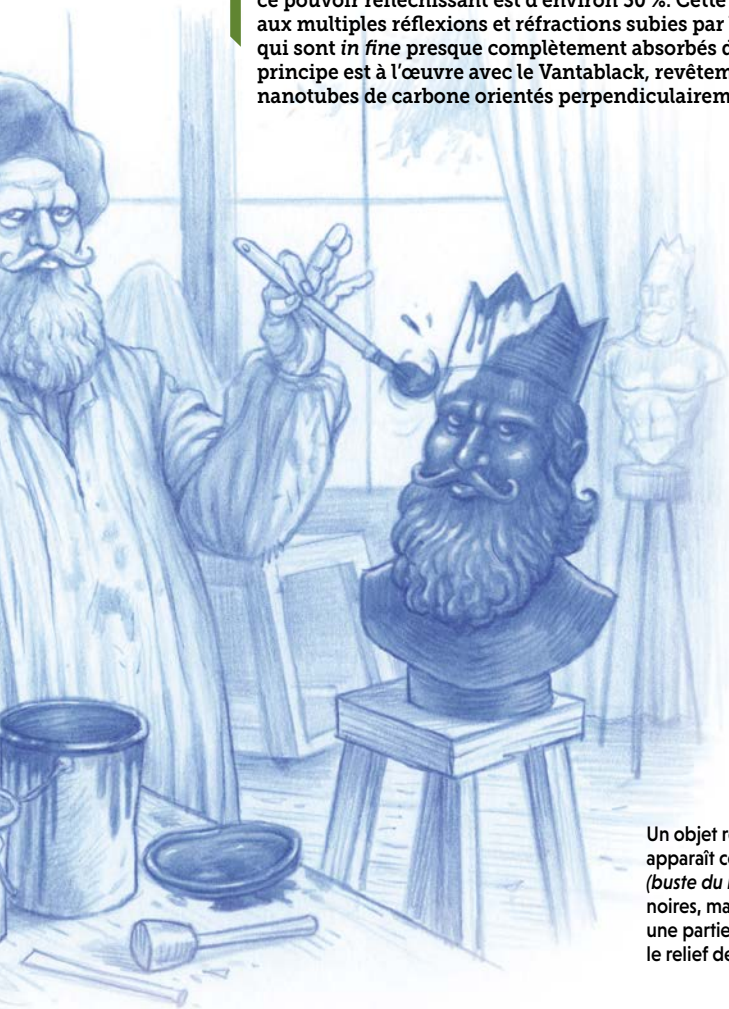
Le résultat, bien vérifié expérimentalement, est remarquable : cette couche de minceur extrême ne transmet que 97,7% de la lumière incidente, quelle que soit sa longueur d'onde. Cette valeur, entièrement déterminée par des constantes fondamentales, signifie aussi que le graphène absorbe 2,3% de la lumière.

Le graphite étant un matériau formé d'un empilement de plans de graphène

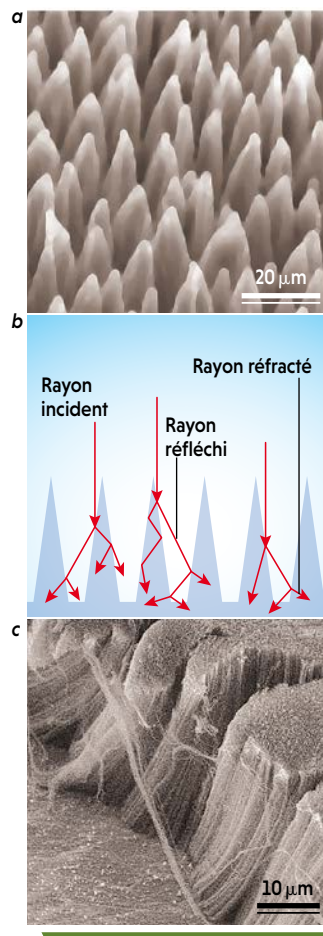


STRUCTURER LA SURFACE POUR ÉLIMINER LES RÉFLEXIONS

Diverses techniques permettent de structurer une surface à l'échelle micrométrique, voire nanométrique. On peut de cette façon réduire considérablement le pouvoir réfléchissant de la surface. Par exemple, une surface de silicium texturée en minuscules cônes au moyen d'impulsions laser (a) a un pouvoir réfléchissant de l'ordre de 1 %, alors que pour une surface lisse, ce pouvoir réfléchissant est d'environ 30 %. Cette réduction des reflets est due aux multiples réflexions et réfractions subies par les rayons lumineux incidents, qui sont *in fine* presque complètement absorbés dans le matériau (b). Le même principe est à l'œuvre avec le Vantablack, revêtement formé d'une couche de nanotubes de carbone orientés perpendiculairement à la surface (c).



Un objet revêtu de Vantablack apparaît complètement noir et donc sans relief (*buste du milieu*). Il existe aussi des peintures très noires, mais moins performantes : en réfléchissant une partie de la lumière, elles laissent apparaître le relief des objets (*buste de droite*).



séparés de 0,336 nanomètre, on peut évaluer la transmission d'une épaisseur de graphite en faisant le produit des transmissions des couches de graphène qui le composent. On estime ainsi que l'absorption est de 90 % pour 100 couches de graphène, soit 34 nanomètres d'épaisseur, et de 99,9 % pour 300 couches, soit 100 nanomètres. Cet ordre de grandeur explique pourquoi, sur une feuille blanche, un trait de crayon à papier, épais de seulement quelques dizaines de nanomètres, apparaît noir.

Par son absorption importante, le carbone semble donc un bon candidat pour faire du noir. Pourtant, la surface d'un morceau d'anthracite, la variété de charbon ayant la plus haute teneur en

carbone (95 %), est, bien que noire, très brillante ! Elle réfléchit la lumière ambiante et l'on sait, depuis Augustin Fresnel, que cette réflexion est inévitable à l'interface de l'air et d'un matériau massif et homogène. En fait, le coefficient de réflexion augmente avec l'indice optique du milieu et aussi avec... son pouvoir d'absorption.

La situation est donc paradoxale : plus le coefficient d'absorption du matériau est élevé, plus le coefficient de réflexion est grand ! Un exemple nous est donné par la comparaison du diamant et du graphite, tous deux composés uniquement de carbone, et dont les indices optiques sont voisins. Une surface de diamant (transparent) renvoie 17 % d'un faisceau de lumière jaune arrivant en incidence >

Les auteurs ont notamment publié : **En avant la physique !**, une sélection de leurs chroniques (Belin, 2017).



> normale. Pour le graphite (absorbant), une surface taillée parallèlement aux plans de graphène renvoie 33% de la lumière incidente. En outre, pour que la réflexion soit faible, il faut que l'indice optique du matériau soit proche de celui de l'air, ce qui signifie qu'il doit être très peu dense...

Puisque les conditions de l'opacité (matériau dense et absorbant) sont aussi celles qui favorisent la réflexion, la situation semble insoluble. Il y a toutefois une solution : texturer la surface afin que l'interface ne soit pas plane. Un procédé élémentaire est de réduire le graphite en poudre la plus fine possible. Le résultat est beaucoup plus noir que le matériau massif. Pourquoi ? Parce qu'avant de repartir vers l'observateur, la lumière subit de multiples réflexions à l'intérieur des anfractuosités de la surface. Mais on ne contrôle pas grand-chose, notamment l'agencement et la forme des agrégats dont la poudre est constituée.

DES SURFACES STRUCTURÉES

On peut faire beaucoup mieux avec les techniques récentes de lithographie ou de nanotechnologie. Au moyen d'impulsions laser, il est ainsi possible de texturer une surface lisse de silicium de façon à y creuser une forêt de pics microscopiques de forme conique. Cela réduit considérablement le pouvoir réfléchissant initial de la surface de silicium, qui est d'environ 30%.

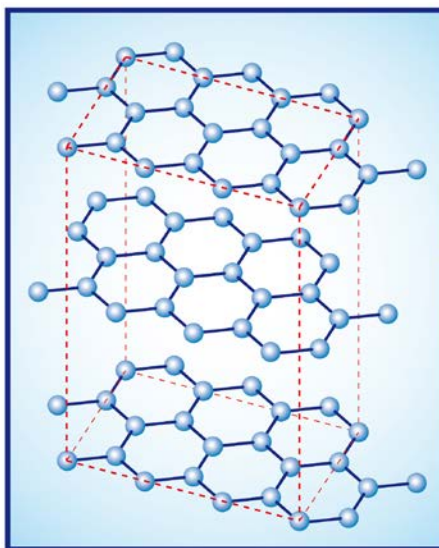
Et si l'on structure une surface à une échelle plus petite que la longueur d'onde lumineuse, l'effet est de réduire la densité de la matière et tout se passe comme si l'on réduisait l'indice optique. Celui-ci est alors une moyenne entre l'indice de l'air et l'indice du matériau massif. Plus la porosité sera élevée, plus l'indice effectif diminuera et se rapprochera de celui de l'air, et donc moins la réflexion sera importante.

La texturation « ultime » est atteinte par le Vantablack (acronyme de *Vertically aligned nanotube array black*) du fabricant britannique Surrey NanoSystems. Il s'agit d'un revêtement d'environ 20 à 30 micromètres d'épaisseur et constitué de nanotubes de carbone d'une vingtaine de nanomètres de diamètre, orientés perpendiculairement à la surface. La densité de ces nanotubes est très faible : ils occuperaient seulement une fraction de 1% du volume du revêtement, ce qui assure un indice optique très proche de l'air.

Les performances sont stupéfiantes. Une surface ainsi revêtue absorbe 99,965% de la lumière visible : le noir obtenu est tel

LA MAGIE DU CRAYON NOIR

Les mines de crayon noir sont en graphite, une forme de carbone constituée de feuillets parallèles de graphène espacés d'environ 0,4 nanomètre. Chaque plan de graphène est formé d'atomes de carbone chimiquement liés entre eux en un réseau hexagonal. Un feuillet de graphène a un pouvoir d'absorption optique relativement élevé : il absorbe 2,3 % de l'intensité lumineuse incidente. Avec quelques dizaines de couches de graphène, un trait de crayon sur du papier blanc apparaît alors noir : le pouvoir d'absorption atteint 50 % au bout de 30 couches seulement, et 90 % au bout de 100 couches.



qu'aucun reflet ne vient aider l'œil à discerner détails ou reliefs. Un objet tridimensionnel recouvert de Vantablack semble ainsi bidimensionnel... au grand plaisir des admirateurs des œuvres d'Anish Kapoor, qui en a l'usage artistique exclusif. Les utilisations professionnelles ne s'arrêtent pas là : déflecteurs, absorbeurs de lumières parasites ou de la lumière solaire, cavités à corps noir...

Mais le Vantablack n'est pas si facile à appliquer, car il faut faire croître les nanotubes à partir de la surface originale. Cela nécessite une technologie de dépôt chimique en phase vapeur ou, sous une forme un peu moins performante (99,8% d'absorption), un processus de pulvérisation exclusif suivi d'un post-traitement.

Cela explique aussi pourquoi la recherche du noir vraiment noir n'est pas achevée. Grâce à un financement participatif, Stuart Semple a ainsi commercialisé une peinture acrylique, le Black 3.0, dont l'absorption dans le visible est comprise entre 98% et 99%. C'est moins bien que le Vantablack, mais mieux que toutes les autres peintures noires applicables au pinceau. Seule condition pour l'acheter : ne pas être Anish Kapoor ou l'un de ses affiliés, c'est expressément écrit ! ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Lehman et al., **Carbon nanotube-based black coatings**, *Applied Physics Reviews*, vol. 5, article 011103, 2018.

Z.-P. Yang et al., **Experimental observation of an extremely dark material made by a low-density nanotube array**, *Nano Letters*, vol. 8(2), pp. 446-451, 2008.

Site de financement participatif du Black 3.0 :
<https://bit.ly/2Pyf3QM>

Site de Surrey NanoSystems sur le Vantablack :
www.surreynanosystems.com/fr/vantablack

POUR LA SCIENCE

Édition française de Scientific American

**COMPLÉTEZ VOTRE COLLECTION
DÈS MAINTENANT !**



N° 499 (mai 19)
réf. PL499



N° 498 (avr. 19)
réf. PL498



N° 497 (mar. 19)
réf. PL497



N° 496 (févr. 19)
réf. PL496



N° 495 (jan. 19)
réf. PL495



N° 494 (déc. 18)
réf. PL494



N° 493 (nov. 18)
réf. PL493



N° 492 (oct. 18)
réf. PL492



N° 491 (sept. 18)
réf. PL491



N° 490 (août 18)
réf. PL490



N° 489 (juillet 18)
réf. PL489



N° 488 (juin 18)
réf. PL488

À retourner accompagné de votre règlement à :

Pour la Science – Service VPC – 19 rue de l'Industrie – BP 90053 – 67402 Illkirch Cedex – email : pourlascience@abopress.fr



OUI, je commande des numéros de Pour la Science, au tarif unitaire de 9,90 €.

1 / JE REPORTE CI-DESSOUS LES RÉFÉRENCES à 5 chiffres correspondant aux numéros commandés :

1^{re} réf. _____ 0 1 x 9,90 € = 9,90 €
 2^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €
 3^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €
 4^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €
 5^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €
 6^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €

TOTAL À RÉGLER _____ €

Groupe Pour la Science – Siège social : 170 bis, boulevard du Montparnasse, CS20012, 75680 Paris Cedex 14 – Sarl au capital de 32000 € – RCS Paris B 311 797 393 – Siret : 311 797 393 000 23 – APE 5814 Z

Offre valable jusqu'au 31/12/2019 en France Métropolitaine uniquement. Pour l'export, rendez-vous sur notre site internet boutique.pourlascience.fr. Les prix affichés incluent les frais de port et les frais logistiques. Les informations que nous collectons dans ce bulletin d'abonnement nous aident à personnaliser et à améliorer les services que nous vous proposons. Nous les utiliserons pour gérer votre accès à l'intégralité de nos services, traiter vos commandes et paiements, et vous faire part notamment par newsletters de nos offres commerciales moyennant le respect de vos choix en la matière. Le responsable du traitement est la société Pour la Science. Vos données personnelles ne seront pas conservées au-delà de la durée nécessaire à la finalité de leur traitement. Pour la Science ne commercialise ni ne loue vos données à caractère personnel à des tiers. Les données collectées sont exclusivement destinées à Pour la Science. Nous vous invitons à prendre connaissance de notre charte de protection des données personnelles à l'adresse suivante : <https://rebrand.ly/charte-donnees-pls>. Conformément à la réglementation applicable (et notamment au Règlement 2016/679/UE dit « RGPD ») vous disposez des droits d'accès, de rectification, d'opposition, d'effacement, à la portabilité et à la limitation de vos données personnelles. Pour exercer ces droits (ou nous poser toute question concernant le traitement de vos données personnelles), vous pouvez nous contacter par courriel à l'adresse protection-donnees@pourlascience.fr.

2 / J'INDIQUE MES COORDONNÉES

☐ M. ☐ Mme

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

Code postal _____ Ville : _____

Téléphone _____

J'accepte de recevoir les offres de Pour la Science ☐ OUI ☐ NON

3 / JE CHOISIS MON MODE DE RÈGLEMENT

☐ Par chèque à l'ordre de Pour la Science

☐ Carte bancaire

N° _____

Date d'expiration _____

Clé (les 3 chiffres au dos de votre CB) _____

Signature obligatoire :



**RETROUVEZ TOUS LES ANCIENS NUMÉROS SUR
BOUTIQUE.POURLASCIENCE.FR**