

dans les zones qui gouvernent le langage, la reconnaissance des objets et les fonctions exécutives. Nous aimerions aussi savoir si l'aire sensorielle primaire et l'aire corticale motrice utilisent les mêmes structures partiellement combinées.

Un autre objectif à court terme est de découvrir dans quelle mesure les nouveaux apprentissages peuvent affecter les performances des volontaires qui utilisent la prothèse. Si l'apprentissage se fait facilement, n'importe quelle aire cérébrale pourrait être implantée d'électrodes et entraînée pour n'importe quelle tâche réalisée par une interface cerveau-machine. Un implant dans le cortex visuel primaire pourrait ainsi apprendre à contrôler des tâches non visuelles. Mais si l'apprentissage est plus limité, un implant, posé par exemple dans une aire motrice, ne pourrait être entraîné que pour des tâches motrices. De premiers résultats suggèrent, de façon générale, qu'un implant devrait être placé dans la zone qui a été préalablement identifiée comme contrôlant l'activité cognitive ciblée.

Une ICM doit savoir faire plus que recevoir et traiter des signaux cérébraux. Elle doit aussi envoyer un retour depuis la prothèse vers le cerveau. Quand nous tentons de saisir un objet, le retour visuel aide à guider la main vers la cible. La position de la main dépend de la forme de l'objet. Si la main ne reçoit pas d'informations tactiles ou de position du membre lorsqu'il commence à manipuler l'objet, les performances se dégradent rapidement.

Il est fondamental de pallier ce manque pour nos volontaires qui ont subi une lésion de la moelle épinière et qui non seulement ne peuvent plus bouger les parties inférieures de leur corps mais ne peuvent non plus percevoir de sensation tactile, ni la position de leur corps dans l'espace, autant d'éléments essentiels à un mouvement fluide. Une neuroprothèse doit donc être à même de compenser cette perte en émettant des signaux dans les deux directions : du cerveau vers la machine, pour transmettre l'intention du volontaire, et de la machine vers le cerveau, pour lui fournir les informations tactiles et de position captées par le membre robotisé.

Robert Gaunt et ses collègues de l'université de Pittsburg se sont attaqués à ce problème en implantant, chez une personne tétraplégique, une série de microélectrodes dans le cortex somatosensoriel, une région où sont traitées les informations tactiles qui proviennent des membres. Les chercheurs ont ensuite envoyé un courant électrique faible à travers ces microélectrodes et le sujet a ressenti des sensations à la surface de sa main.

À notre tour, nous avons utilisé des implants dans la zone du cortex somatosensoriel recevant les sensations du bras. Nous avons été agréablement surpris de constater que le

patient a perçu des sensations naturelles de pression, de tapotement et de vibrations sur la peau. Il a également senti son bras bouger – sensation qui correspond à la proprioception. Ces expériences montrent que les personnes qui ont perdu les sensations de leurs membres peuvent les recouvrer grâce à des ICM qui les impriment dans leur cerveau. La prochaine étape consistera à utiliser des mains de robot bardées de capteurs pour voir si le retour somatosensoriel améliore la dextérité du membre robotisé sous le contrôle du cerveau. Nous aimerions aussi savoir si les sujets ressentent une impression d'intégration, comme si le bras robotisé devenait une partie de leur corps.

AMÉLIORER LES ÉLECTRODES

Un autre défi majeur consiste à améliorer la capacité des électrodes à envoyer et à recevoir des signaux nerveux. Nous avons découvert que les implants fonctionnent pendant cinq ans environ. Cependant, avec de meilleures électrodes, on pourrait accroître la longévité de ces systèmes et augmenter le nombre de neurones associés. L'augmentation de la longueur des électrodes, qui est une autre priorité, permettrait d'atteindre des zones situées dans les replis du cortex.

Par ailleurs, avec des électrodes flexibles, qui suivent les légers déplacements du cerveau, dus par exemple à des variations de la tension artérielle, la stabilité des enregistrements s'améliorera. Aujourd'hui, il faut parfois recalibrer le décodeur, car il arrive que les électrodes rigides se décalent légèrement par rapport aux neurones d'un jour à l'autre, alors que l'on aimerait suivre l'activité de populations identiques de neurones sur plusieurs semaines, voire plusieurs mois.

Enfin, les implants doivent être miniaturisés, fonctionner à faible puissance (pour ne pas avoir à chauffer le cerveau) et sans fil, pour éviter d'avoir à relier l'outil au tissu cérébral. L'implantation de toutes les interfaces actuelles nécessite une opération chirurgicale. Mais nous espérons qu'un jour seront mises au point des interfaces d'enregistrement et de stimulation capables d'envoyer et de recevoir des signaux à travers le crâne avec des performances égales à celles des électrodes actuelles implantées chirurgicalement.

Ce n'est qu'à ce moment-là, lorsque nous aurons mis au point des techniques non invasives, capables de détecter avec précision l'activité de neurones individuels, qu'une amélioration sera atteinte. Les ICM, élaborées dans l'objectif d'aider les personnes paralysées, atteindront-elles un jour le niveau de la technologie fantasmée par les livres de science-fiction, les films et les médias, qui serait utilisée pour améliorer l'humain et lui conférer des «superpouvoirs» lui permettant de courir plus vite et sauter plus haut ? À l'heure actuelle, nous en sommes encore loin. ■

BIBLIOGRAPHIE

M. Armenta Salas et al., **Proprioceptive and cutaneous sensations in humans elicited by intracortical microstimulation**, *eLife*, vol. 7, article e32904, 2018.

S. Flesher et al., **Intracortical microstimulation of human somatosensory cortex**, *Science Translational Medicine*, vol. 8, article 361ra141, 2016.

T. Aflalo et al., **Decoding motor imagery from the posterior parietal cortex of a tetraplegic human**, *Science*, vol. 348, pp. 906-910, 2015.

L. Hochberg et al., **Reach and grasp by people with tetraplegia using a neurally controlled robotic arm**, *Nature*, vol. 485, pp. 372-75, 2012.

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

DES TROUS À ENTOURER AVEC PARCIMONIE

Laisser des trous dans un assemblage de carrés en minimisant le nombre de pièces utilisées: ce problème de géométrie n'est pas facile. Mais le cheminement vers sa solution illustre bien la démarche des mathématiciens.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au Centre
 de recherche en
 informatique, signal
 et automatique de Lille
 (Cristal)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Le tâtonnement et la construction progressive de la solution d'une énigme géométrique d'apparence simple sont les sujets de cette rubrique. L'objectif est d'illustrer les diverses étapes qu'un mathématicien doit franchir pour comprendre un problème, et l'intérêt de passer de la découverte d'une solution dont on vérifie la justesse à la certitude qui ne s'obtient qu'en élaborant une démonstration. Ainsi, le travail de recherche comporte plusieurs phases plus ou moins entremêlées :

- a) La prise de contact avec le problème, sa formulation claire et le traitement de quelques cas particuliers.
 - b) La prise de conscience des difficultés et l'approfondissement de l'exploration, conduisant à la découverte de régularités et à la formulation d'hypothèses.
 - c) La mise au point d'une réponse vraisemblable accompagnée de quelques calculs pour formuler la solution.
 - d) L'élaboration d'une démonstration complète, nécessitant une compréhension approfondie du problème et l'introduction d'idées nouvelles. Lors de cette phase, on démontre parfois des résultats intéressants, au-delà de la question initiale.
 - e) La formulation d'autres problèmes proches que la méthode trouvée permet de traiter, ou qui sont liés mais demanderaient un travail nouveau.
- Nous nous intéresserons aux formes du plan composées de pièces carrées de côté

unitaire, posées côté contre côté que nous dénommerons ici « formes » (voir l'encadré 1).

Posons-nous la question: pour un entier n donné, combien faut-il au minimum de carrés pour assembler une forme présentant n trous? Nous noterons $f(n)$ ce nombre minimal.

Pour que le problème soit bien défini, précisons que des trous distincts ne doivent pas se toucher, et que seuls comptent les trous totalement entourés de carrés. Nous pourrions adopter d'autres conventions, mais elles définiraient d'autres problèmes.

EXPÉRIMENTATION

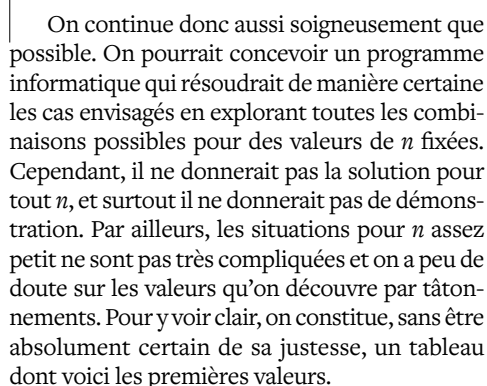
La première chose à faire est de résoudre le problème pour les petites valeurs de n . Pour $n=1$, $n=2$ et $n=3$, c'est simple. Il est clair que l'on ne peut pas faire mieux que les formes dessinées sur les figures 2a, 2b, 2c. On a donc $f(1)=8$, $f(2)=13$, $f(3)=18$. Remarquons que pour $n=3$, il y a trois figures différentes de 18 carrés comportant trois trous.

Ces premiers cas pourraient suggérer que l'on a, pour tout entier n , $f(n+1)=f(n)+5$. Avec $f(1)=8$, cela conduirait à la formule générale $f(n)=3+5n$ et donc à $f(4)=23$. C'est faux! Il semble plutôt que $f(4)=21$ (voir la figure 2f).

Pour $n=4$, on gagne quelque chose en renonçant à aligner les trous. Pour $n=5$ et 6, il n'est pas possible de faire mieux que 26 et 29.

Pour $n=5$, il faut à nouveau ajouter 5 au résultat précédent ($f(5)=26$), mais pour $n=6$, il suffit d'ajouter 3, puisque $f(6)=29$. La règle semble obscure: parfois on doit ajouter 3 au résultat précédent, parfois il faut ajouter 5.

Par définition, une « forme » désigne ici un assemblage de pièces carrées collées côté contre côté (a, b, c, d). La définition des trous est précisée par les figures e, f, g, h, i .



n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	8	13	18	21	26	29	34	37	40	45
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	48	51	56	59	62	65	70	73	76	79
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f(n)$	84	87	90	93	96	101	104	107	110	113
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$f(n)$	118	121	123	127	130	133	138	141	144	147

L'observation attentive suggère une hypothèse pour les ajouts de 3 ou de 5 d'un cas au suivant. On note en effet que les ajouts sont successivement: +5 +5 +3 +5 +3 +5 +3 +3 +5 +3 +3 +5 +3 +3 +3 +5 +3 +3 +3 +5 ...

1 1 2 2 3 3 4 4 5 5 ...

L'expérience acquise dans la résolution sans démonstration des premiers cas suggère >

Le problème est de trouver, pour chaque entier positif n , le nombre minimum $f(n)$ de carrés qu'il faut utiliser pour créer une forme (au sens indiqué dans l'encadré 1) dotée de n trous. On a représenté sur les figures a, b, c, d, e, f, g, h les solutions pour les valeurs du nombre n de trous égales à 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pour ces valeurs, les nombres de carrés sont, respectivement, 8, 13, 18, 21, 26, 29.



> qu'on peut créer un nouveau trou avec 5 carrés (en construisant une rangée, ou barre, de trous, comme celles des figures 2a, 2b, 2c, ou en commençant une nouvelle barre), mais que parfois on peut s'en sortir avec seulement 3 carrés nouveaux à la condition de s'appuyer à la fois sur une barre déjà construite et sur un trou déjà construit de la nouvelle barre.

Simplifions le problème. Nous n'envisagerons que des constructions fonctionnant en partant d'une barre horizontale de base, puis en posant de nouvelles barres de même longueur sur la première tant que c'est possible. Nous les appellerons « formes standard » (voir la figure 3d). Nous envisageons ces formes particulières, car nous avons l'impression que nous ne pouvons avoir mieux que ce qu'elles donnent. Il faudra nous en assurer plus tard.

En construisant une forme standard pour un nombre donné n de trous, avec le but d'utiliser le minimum de carrés pour créer des trous, deux objectifs s'opposent. Pour avoir le plus de trous exigeant 3 nouveaux carrés, nous avons intérêt à avoir une barre horizontale de base aussi longue que possible (car le premier trou d'une nouvelle barre nécessite l'ajout de

5 carrés et les autres de la même barre seulement 3; il est donc intéressant de limiter le nombre total de barres. Cependant, chaque trou supplémentaire de la première barre horizontale coûte 5 carrés, il faudrait donc limiter aussi la longueur de la première barre horizontale. La question est donc: pour minimiser le nombre de carrés utilisés, faut-il minimiser le nombre de barres mises les unes sur les autres, ou minimiser la longueur de la première barre construite?

Pour répondre, comptons. Le nombre de fois que nous devons utiliser 5 carrés pour un nouveau trou est égal au nombre de trous de la première barre moins 1 (le premier trou exige huit carrés), auquel on additionne le nombre de barres moins 1 (puisque la première barre est déjà comptée). Si l'on n'envisage que des formes standard, pour avoir le minimum de carrés, il faut donc minimiser la somme $l-1+h-1$ (où l est le nombre de trous de la première barre et h le nombre de barres), ce qui revient à minimiser la somme $l+h$ avec la contrainte que $lh \geq n$ pour qu'il y ait n trous.

Sous réserve de démontrer qu'on ne peut pas mieux faire que ces formes standard, le minimum de carrés pour n trous sera obtenu

3

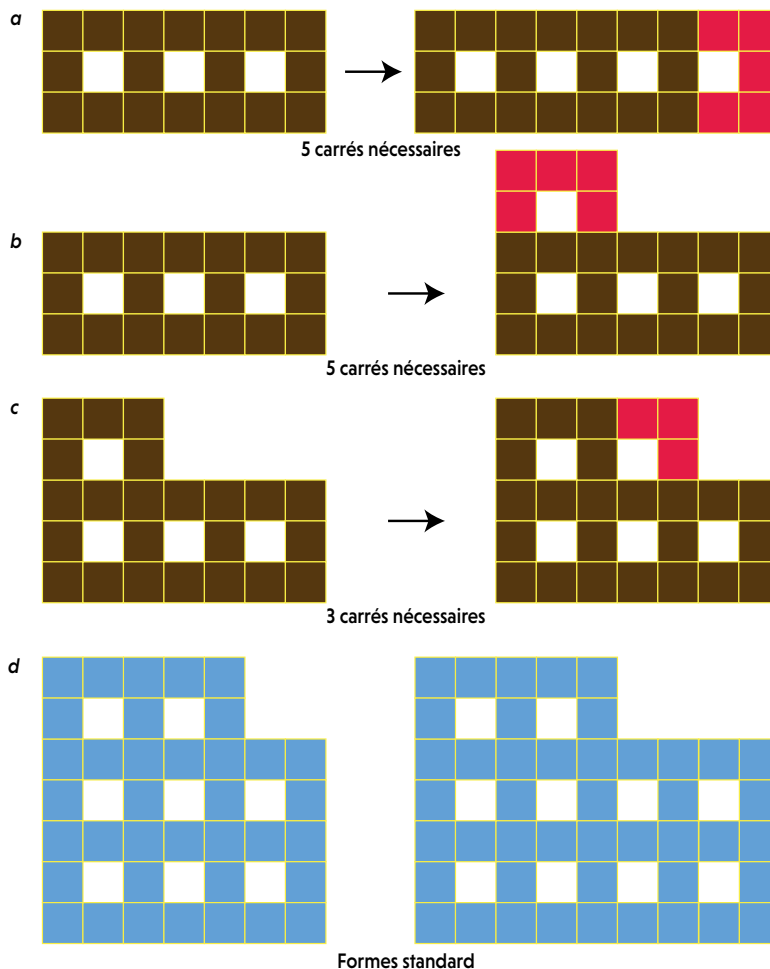
TROIS CARRÉS, CINQ CARRÉS ET FORMES STANDARD

Quand on construit une barre (ou rangée) de trous, 5 carrés sont nécessaires pour chaque nouveau trou (a). De même, quand on crée une nouvelle barre de trous posée sur des barres déjà construites, le premier trou exige 5 carrés (b).

En revanche seuls 3 nouveaux carrés sont nécessaires si l'on s'appuie sur une barre déjà créée en même temps qu'on s'appuie sur un trou déjà créé de la barre de trous (c).

Dans un premier temps, pour traiter le problème, on se limite aux formes composées de barres horizontales de trous, posées les unes sur les autres et de même longueur, sauf éventuellement la dernière.

Ces formes particulières (d) sont dénommées « formes standard ». On fait le pari qu'on ne peut pas faire mieux que ces formes standard... ce que l'on démontrera.



par la construction d'une forme de ce type vérifiant $lh \geq n$ et $l+h$ minimum.

NOMBRES DE CARRÉS COMPOSANT UNE FORME STANDARD

Si nous avons raison de ne considérer que des formes standard, la réponse $f(n)$ est le nombre de carrés de ces formes. Pour une forme standard, il faut $3n$ carrés, car chaque trou demande au moins trois carrés nouveaux. À ces $3n$, nous devons ajouter 5 pour le premier trou qui demande 8 carrés, puis ajouter 2 pour chacun des autres trous de la première barre, donc $2(l-1)$, et enfin ajouter 2 pour chaque premier trou de chaque barre après la première, donc $2(h-1)$. Au total, une forme standard de n trous demande $3n + 5 + 2(l-1) + 2(h-1) = 3n + 2l + 2h + 1$ carrés, où l est le nombre de trous de la première barre horizontale et h le nombre de barres horizontales. La forme sera la meilleure possible pour n trous si $lh \geq n$ et $l+h$ minimum.

Vérification de la formule. Pour $n=1$, nous avons $l=h=1$, donc $3n + 2l + 2h + 1 = 8$ carrés, ce qui est le résultat attendu. Pour $n=4$, on a $l=h=2$, donc $3n + 2l + 2h + 1 = 12 + 4 + 4 + 1 = 21$. Cela correspond à nos dessins et au tableau.

Nous sommes sur une bonne piste; reste à justifier l'hypothèse sur les formes standard et à résoudre la minimisation de $l+h$, avec $lh \geq n$.

VIEUX RÉSULTATS SUR LES DISQUES ET LES RECTANGLES

Un entier n étant donné, comment déterminer dans le cas général deux entiers l et h tels que $lh \geq n$ avec $l+h$ minimum?

Une idée vient à l'esprit: il faut faire le plus carré possible, donc l et h les plus égaux possible. Le problème est analogue aux problèmes des courbes fermées délimitant une aire donnée: la courbe ayant la plus petite longueur pour une aire fixée est le cercle. Ce résultat, dénommé théorème des isopérimètres, est dû à Jacques Bernoulli qui, sans le démontrer d'une manière parfaitement satisfaisante, en a eu clairement conscience. Seul le xx^e siècle réussira à produire une preuve complète de l'énoncé.

Une question plus proche encore de la nôtre et plus simple à traiter rigoureusement a été abordée dès l'Antiquité par Zénodore au 11^e siècle avant notre ère. Il se demandait quel polygone à c côtés (c fixé) délimitant une aire fixée possède le plus petit périmètre. La réponse est le polygone régulier à c côtés. Dans le cas $c=4$, cela signifie que parmi tous les rectangles délimitant une aire donnée (et même plus généralement parmi tous les quadrilatères), le carré est celui de plus petit périmètre. C'est presque la question qui nous occupe ici.

Pour le problème des trous, nous obtenons que les nombres entiers l et h tels que $lh \geq n$ avec $l+h$ minimum (c'est la même chose que minimiser le périmètre de rectangles de côtés l et h)

4

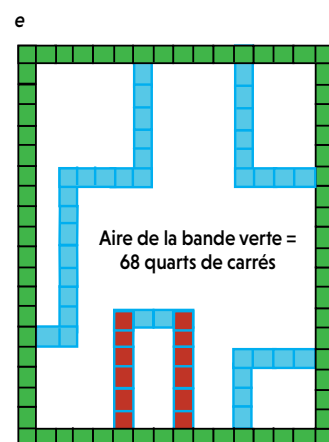
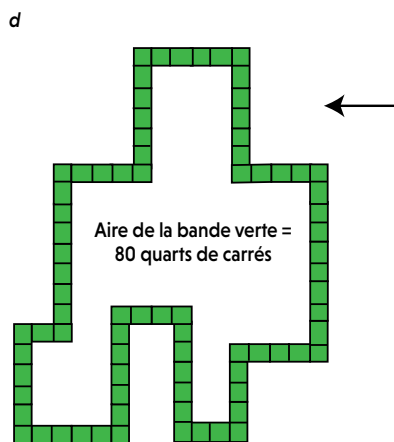
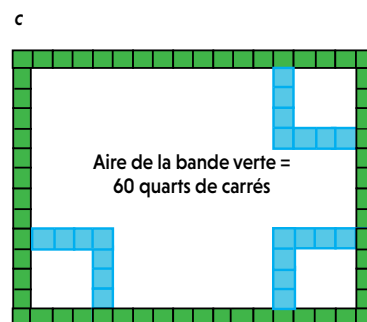
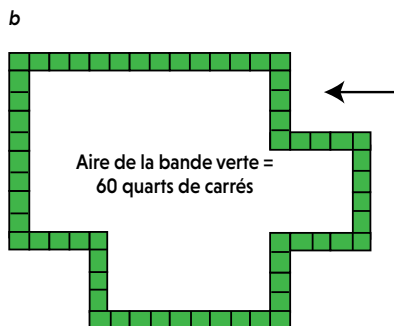
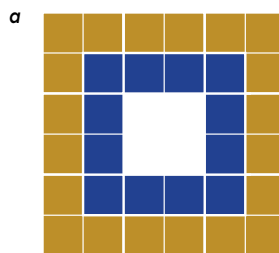
BORDER UN TROU ET UNE FORME

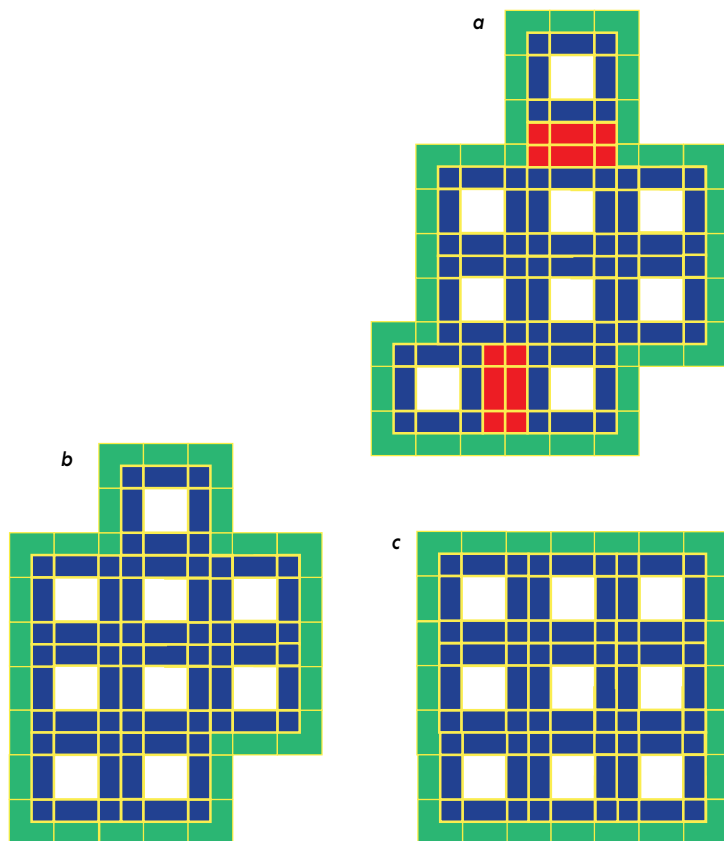
À chaque trou, on associe une bande de largeur $1/2$ qui l'entoure (a). Pour un trou de côté 1, l'aire de cette bande (en bleu foncé) est 3. Les bandes associées à des trous différents ne se chevauchent pas. Pour obtenir n trous, il faut donc au moins $3n$ pièces carrées.

La bande de largeur $1/2$ (en vert) qui suit le pourtour d'une forme contenue dans un

rectangle de hauteur H et de largeur L est d'aire $H + L - 1$ s'il n'y a pas de renforcement (b); on le démontre en enlevant des coins (c). L'aire de la bande verte est plus grande s'il y a des renforcements (d; les carrés rouges du renforcement n'ont pas de correspondants, e).

Notons que la bande qui suit le pourtour ne chevauche aucune des bandes bordant les trous.





5

ESPACES PERDUS

La forme à 9 trous (a) faite de 48 carrés comporte deux espaces perdus (en rouge) qui ne sont ni la bordure d'un trou ni la bordure du périmètre.

La forme à 9 trous (b) utilise 42 carrés sans espace perdu, mais avec une mauvaise disposition des trous carrés.

La forme optimale pour 9 trous utilise 40 carrés (c) : il n'y a pas d'espace perdu et la disposition des trous est optimale.

> sont ceux correspondant aux formes les plus carrées, donc ceux où l et h sont les plus égaux possible. Ici, cela donne $l=h$, ou bien l diffère de h d'une unité. L'intuition que le carré est la meilleure façon de faire est confirmée. Une démonstration directe de cette propriété arithmétique est possible.

Exemples. Pour avoir $lh \geq 8$ avec $l+h$ minimal, il faut prendre $l=h=3$. Pour avoir $lh \geq 11$ avec $l+h$ minimal, il faut prendre $l=3$ et $h=4$ ou $l=4$ et $h=3$. Notons que, parfois, d'autres couples éloignés de plus d'une unité font aussi bien que ceux éloignés de 0 ou 1 unité (mais ils ne font pas mieux). Ainsi, pour avoir $lh \geq 10$ avec $l+h$ minimal, on trouve $l=3$ et $h=4$ ou $l=4$ et $h=3$, mais on a aussi $l=5$ et $h=2$, ou $l=2$ et $h=5$.

Où en sommes-nous de notre problème? Il semble que nous détenons la solution, mais nous ne l'avons pas démontrée, car nous avons recherché des solutions uniquement en

considérant des formes standard. N'y a-t-il pas des formes d'un autre type faisant mieux que les formes standard? Il faut prouver que non.

L'AIRE MINIMALE EXIGÉE ET RÉSERVÉE PAR TROU

Une idée consiste à examiner l'aire minimale de pièces carrées qu'entraîne inévitablement la présence d'un trou en prenant en compte que, d'après les règles du jeu, chaque trou doit être entièrement entouré de pièces carrées. Chaque trou de côté 1 doit par exemple être entouré de 8 carrés exactement. Certains de ces carrés pourraient être utilisés en même temps pour entourer d'autres trous; on ne peut donc pas dire que chaque trou impose au moins huit carrés. En revanche, si l'on découpe chaque pièce carrée en quatre carrés plus petits de côté $1/2$, on peut affirmer que les petits carrés de côté $1/2$ qui bordent le trou ne pourront pas border un autre trou. Il y a 12 petits carrés de côté $1/2$ qui bordent un trou de 1 carré. Leur aire est 3 (car $12 \times 1/4 = 3$); ils forment une bande de largeur $1/2$ autour du trou, et chaque petit carré de cette bande est réservé pour le trou qu'il borde (voir l'encadré 4).

Il faut donc au moins une aire de $3n$ unités pour constituer l'ensemble des bandes autour de n trous; et bien sûr, pour cette aire de $3n$ unités, il faut au moins $3n$ pièces carrées. Pour des trous ayant une aire supérieure à 1, il faut réserver un nombre plus grand de petits carrés pour la bande le bordant, mais chaque trou exigera au moins 3 pièces carrées pour lui et donc n trous exigeront dans le meilleur des cas $3n$ carrés. Cela démontre que $f(n) \geq 3n$.

Nous savons aussi que, grâce aux formes standard, nous pouvons faire n trous avec $3n+2l+2h+1$ pièces carrées, $lh \geq n$ et $l+h$ minimal; autrement dit, $f(n) \leq 3n+2l+2h+1$. Nous pourrions conclure si nous réussissons à améliorer l'inégalité $f(n) \geq 3n$ que nous venons d'obtenir avec les bandes autour des trous.

La solution va provenir de la prise en considération du périmètre des formes. Toute forme a un pourtour, et la bande d'épaisseur $1/2$ qui suit ce pourtour n'est jamais utile pour entourer un trou. L'aire de cette bande dépend du périmètre de la forme.

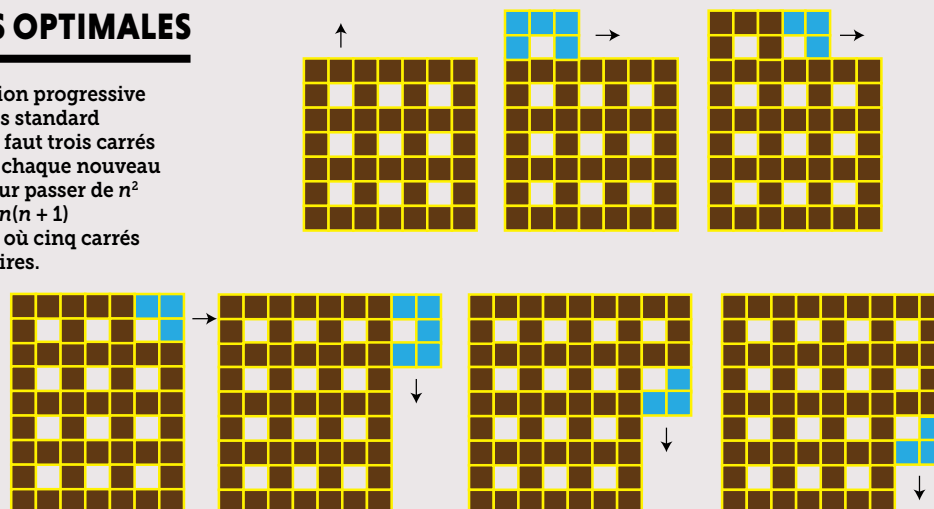
On montre que cette bande a une aire au moins égale à $H+L-1$, où H et L sont la hauteur et la largeur du plus petit rectangle contenant la forme (voir l'encadré 4). Or pour faire tenir n trous qui ne se touchent pas, il faut au moins une hauteur $2h+1$ et une largeur $2l+1$ avec $hl \geq n$. L'aire de toutes les bandes d'épaisseur $1/2$ autour des trous et le long du périmètre est donc au moins égale à $3n+(2l+1)+(2h+1)-1 = 3n+2l+2h+1$, avec $lh \geq n$ et $l+h$ minimal.

La bande de largeur $1/2$ qui suit le pourtour d'une forme contenue dans un rectangle de hauteur H et de largeur L a une aire égale à

6

FORMES OPTIMALES

Construction progressive de formes standard optimales : il faut trois carrés de plus pour chaque nouveau trou, sauf pour passer de n^2 à $n^2 + 1$ et de $n(n+1)$ à $n(n+1) + 1$, où cinq carrés sont nécessaires.



$H+L-1$ s'il n'y a pas de renforcement (figures 4b et 4c), et une aire plus grande s'il y en a (figures 4d et 4e). On démontre cette propriété en considérant l'opération consistant à enlever un coin à un rectangle.

Miracle! Nous retrouvons exactement l'expression du nombre de carrés d'une forme standard à n trous. Conclusion: on ne peut pas faire mieux qu'utiliser ce nombre de carrés, et avec les formes standard, on y arrive. Nous avons donc prouvé que $f(n) = 3n + 2l + 2h + 1$ avec $lh \geq n$ et $l+h$ minimal.

L'encadré 5 montre les diverses situations possibles quand on crée des trous et qu'on dessine les bandes d'épaisseur $1/2$. Dans le cas général, en dehors de ces bandes pour les trous et le périmètre, il y a des bouts de surface qui ne sont utilisés par aucune bande. Ces parties en rouge sur le dessin correspondent en quelque sorte à de la surface perdue. Dans le cas des figures optimales et en particulier dans le cas des formes standard, aucune surface n'est perdue: tout bout de la surface des pièces carrées est utilisé, soit pour border un trou, soit pour border le périmètre. L'intuition, acquise pendant la phase d'exploration du problème, que les formes standard les plus carrées permettent de créer n trous en utilisant un minimum de pièces carrées est démontrée! Le tâtonnement, la recherche de solutions, l'intuition géométrique et la démonstration se sont rejoints.

REMARQUES SUR LA SUITE DES NOMBRES $f(n)$

En étudiant la suite de nombres $f(n)$, on remarque que pour passer de $f(n)$ à $f(n+1)$, on ajoute toujours 3, sauf quand on passe de n^2 à n^2+1 et de $n(n+1)$ à $n(n+1)+1$, auxquels cas il faut ajouter 5.

L'encadré 6 illustre cette propriété avec la construction progressive de formes standard les plus carrées possible: partant d'un carré

pour ajouter un trou, on ne peut faire autre chose que d'utiliser 5 pièces. De même en partant d'une forme standard de $n(n+1)$ trous.

On démontre que:

- si $n = h^2$, $f(n) = 3h^2 + 4h + 1$;
- si $n = h^2 + m$ avec $0 < m \leq h$, alors $f(n) = 3h^2 + 4h + 3m + 3$;
- si $n = h^2 + m$ avec $h < m \leq 2h + 1$, alors $f(n) = 3h^2 + 4h + 3m + 5$.

La suite $f(n)$ figure-t-elle dans l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org/book.html>)? Oui, car... je l'ai ajoutée. C'est la suite <https://oeis.org/A319879>. Avant que je ne m'intéresse à ce problème de trous, personne en mathématiques n'avait semble-t-il rencontré cette suite numérique.

AUTRES PROBLÈMES DU MÊME TYPE

Parmi les problèmes liés à celui que nous venons de traiter ou le généralisant, mentionnons:

- la variante consistant à rechercher le nombre minimal de carrés nécessaires pour que l'aire totale des trous soit n ;
- la variante consistant à utiliser une définition plus souple de la notion de trou, sans imposer par exemple que deux trous ne se touchent pas;
- les variantes consistant à remplacer les pièces carrées par des pièces ayant la forme d'un triangle équilatéral, ou d'un hexagone régulier;
- les généralisations dans l'espace avec des cubes, ou en dimension supérieure;
- le dénombrement des solutions optimales.

Les trois premières variantes et les généralisations en dimensions supérieures se traiteront probablement de manière analogue aussi bien pour la découverte de la solution que pour sa démonstration. Le problème du dénombrement des solutions est sans doute assez difficile. ■

BIBLIOGRAPHIE

G. Villemin, **Le problème de la reine Didon**, <https://bit.ly/2VtBE7u>

Théorème isopérimétrique, Wikipédia, https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_isopérimétrique

Didon, Wikipédia, <https://fr.wikipedia.org/wiki/Didon>

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

DES BULLES ET DES CELLULES

La Société française de physique a organisé un concours d'images scientifiques. Parmi des centaines de propositions, le jury a désigné quatre lauréats.

P

lus de 360 ! C'est le nombre de candidatures reçues pour le concours « Beautiful science » organisé par la Société française de physique (SFP) à l'occasion de son 25^e congrès général qui se tiendra en juillet à Nantes. La compétition, ouverte à tous (les participants avaient de 9 à 87 ans !) et portant sur toutes les sciences, a mis en lice images, vidéos et sons sur le thème : montrer la science dans ce qu'elle a de plus beau et de plus élégant, de l'infiniment petit à l'infiniment grand.

L'événement avait pour parrain le collectif *Obvious* (Pierre Fautrel, Hugo Caselles-Dupré et Gauthier Vernier) qui s'était illustré il y a quelques mois par la vente record d'une de leurs toiles conçues par intelligence artificielle : *Le Portrait d'Edmond de Bellamy* fut adjugé à plus de 432 500 dollars chez Christie's.

Le 28 mai, le jury s'est donc réuni et a délibéré en quelques heures pour, finalement, désigner quatre lauréats sur des critères d'esthétisme, d'originalité et d'étonnement suscité. Le premier est Antoine Lagarde, en deuxième année de thèse en mécanique des fluides, à Paris. Sa photographie, intitulée *Dans l'intimité d'une frontière franchie* (1), montre une bulle d'air qui traverse une interface séparant eau et huile.

Le deuxième prix est allé à *Îlot de cellules* (2), de Nicolas Harmand, David Pereira et Sylvie Hénou, respectivement doctorant, postdoctorant en biophysique

et professeure en microrhéologie cellulaire. Des cellules épithéliales d'un rein de chien sont cultivées sur un gel de polyacrylamide où des protéines d'adhérence sont disposées en disques de façon à contraindre la croissance cellulaire. En microscopie confocale à fluorescence, les noyaux des cellules apparaissent en bleu et les contours en jaune.

À la troisième place, deux *ex aequo*. D'abord, *Hallucination cellulaire* (3), de Martine Batailler, assistante ingénieure en neuroendocrinologie à l'Inra. Là encore, il s'agit d'une culture cellulaire, même si le

Les quatre images
lauréates du concours
Beautiful Science.

