

LA CHRONIQUE DE
VIRGINIE TOURNAY

LE FUTUR DU PASSÉ EST-IL ASSURÉ ?

La muséographie moderne, qui privilégie l'expérience individuelle et sensible, et internet, qui affiche des visions concurrentes, transforment la connaissance de l'histoire.



Dimanche 25 août 2019. Pour le 75^e anniversaire du Paris délivré de ses oppresseurs, le musée de la Libération a été entièrement réaménagé dans les pavillons Ledoux, lieu patrimonial qui fut le siège de la Résistance. Conçue pour rendre l'histoire le plus « vivante » possible, la visite est truffée de cartes interactives et de technologies de réalité augmentée. Ces outils numériques peuvent-ils renforcer notre connaissance des faits historiques et notre mémoire collective ? En fait, savoir et mémoire mobilisent des ressorts différents de la confiance.

Tout d'abord, les scénographies numériques facilitent une appropriation « expérientielle » de l'histoire, c'est-à-dire l'acquisition d'une connaissance sensible des faits à partir du vécu de ses personnages. Ainsi, la reconstitution virtuelle amène le visiteur, plongé dans la peau d'un résistant grâce à un casque de réalité augmentée, à revivre l'ambiance et les événements de ce lieu confiné.

Donner une représentation visuelle au passé à partir de la numérisation des archives alimente de nombreux projets muséographiques. Ainsi, l'exposition « Les Cités millénaires », à l'Institut du monde arabe, en 2018, doit son succès aux mises en scène immersives de patrimoines détruits par la guerre comme à Palmyre, Alep ou Mossoul.

Le numérique bouleverse les supports traditionnels de notre mémoire collective

C'est avant tout une histoire par le bas qui est proposée. Qu'il s'agisse de remonter aux origines de la vie avec le Muséum national d'histoire naturelle ou de transmettre le ressenti de peintures à l'atelier des Lumières, les techniques immersives ont le vent en poupe.

Cependant, parallèlement à ces possibilités de reconstitution du passé, le numérique bouleverse les supports traditionnels de notre mémoire collective, structurés par les bibliothèques, les archives et les musées. Avant internet, la confiance dans notre récit historique partagé découlait de la synchronisation mémorielle que nous procuraient les livres, les sources primaires et les collections d'objets historiques dans des lieux dédiés.

Par exemple, ce croisement des contenus nous assure aujourd'hui de l'existence passée des ravages causés par les maladies infectieuses et du tournant opéré par la vaccination : les archives médicales donnent accès à l'épidémiologie animale et humaine de la rage aux XIX^e et XX^e siècles, de nombreux récits décrivent les symptômes de cette grave pathologie et le musée Pasteur conserve les instruments scientifiques à l'origine des découvertes de l'illustre savant.

Mais avec internet et la structure distribuée du web mondial, on assiste à une (ré)écriture collaborative des faits, plusieurs récits mémoriels étant mis en concurrence, avec une amplification des thèses complotistes, pseudoscientifiques et révisionnistes. Et le tri algorithmique effectué par les moteurs de recherche accentue ces biais en présentant aux internautes des contenus en phase avec leur historique de navigation.

Ainsi, la révolution muséographique favorise l'expérience individuelle et sensible du récit historique, tandis que la Toile multiplie les discours concurrents sur le passé et ses interprétations. Il y a là deux écueils à surmonter, sans quoi le numérique fragilisera le futur du passé en mettant à mal la hiérarchie des faits. Le relativisme doit être contrebalancé par la conscience partagée du progrès et du tragique de l'histoire. Et face au risque de privatisation de la mémoire collective, rappelons les propos d'Ariane Mnouchkine, directrice du théâtre du Soleil : l'histoire de l'humanité et les cultures appartiennent à tout le monde. ■

VIRGINIE TOURNAY, biologiste de formation, est politologue et directrice de recherche du CNRS au Cevipof, à Sciences Po, à Paris.

L'ESSENTIEL

> La théorie usuelle des ensembles, à la base des mathématiques, repose sur un système d'axiomes noté ZFC. Elle constitue une théorie des infinis, dont il existe toute une hiérarchie.

> Selon « l'hypothèse du continu », il n'existe pas d'infini intermédiaire entre celui des nombres entiers et celui des nombres réels.

> Dans la théorie ZFC, cette hypothèse est indémontrable.

> On cherche à compléter la théorie ZFC par des axiomes raisonnables qui permettraient de lever l'indécidabilité de l'hypothèse du continu.

> L'Américain Hugh Woodin a récemment indiqué une voie prometteuse vers cet objectif.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au laboratoire
Cristal (Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)

En finir avec l'hypothèse du continu

L'existence ou non d'un infini intermédiaire entre celui des nombres entiers et celui des nombres réels est une question que les mathématiciens et les logiciens pensaient impossible à trancher. Mais l'Américain Hugh Woodin est d'un avis contraire. Et ses travaux récents indiquent une voie possible pour résoudre cette énigme centrale posée par l'infini.

Le concept d'infini a de tout temps été une source d'importantes difficultés. Philosophes et théologiens ont eu à son propos d'interminables et assez stériles discussions, et les mathématiciens eux-mêmes n'ont commencé à manier l'infini de façon précise et satisfaisante qu'à partir du XIX^e siècle. Notamment, on avait conscience de rencontrer en mathématiques différents types d'infini, mais on ne savait pas comment les caractériser ni les comparer.

On faisait face à ce qui semblait être des absurdités. Par exemple, en multipliant par 2 chaque nombre entier, on établit une correspondance « biunivoque » entre les entiers et les nombres pairs : $1 \leftrightarrow 2$, $2 \leftrightarrow 4$, $3 \leftrightarrow 6$, $4 \leftrightarrow 8$, $5 \leftrightarrow 10$, etc. De cette façon, à tout entier n correspond un unique entier pair $p=2n$; inversement, à tout entier pair p correspond un unique entier (pair ou impair) $n=p/2$. Cette correspondance biunivoque >

> suggère qu'il y a autant d'entiers pairs que d'entiers pairs et impairs réunis, lesquels paraissent pourtant deux fois plus nombreux que les seuls entiers pairs!

Dans les années 1870, le mathématicien allemand Georg Cantor a proposé d'utiliser cette propriété de correspondance biunivoque, ou bijection, pour comparer entre eux des ensembles constitués d'une infinité d'éléments. Cela ne conduit directement à aucune contradiction; d'ailleurs, on peut définir un ensemble infini comme étant un ensemble qui est en bijection avec une partie (au sens strict) de lui-même – définition dont on vérifie facilement le bien-fondé sur notre exemple des entiers et des entiers pairs.

Partant de là, Cantor a pu construire une théorie des ensembles qui constitue une théorie mathématique de l'infini et qui est aujourd'hui le socle sur lequel se développent toutes les mathématiques. L'axiomatisation de la théorie des ensembles a fait surgir quelques difficultés, mais celles-ci ont pour l'essentiel fini par être résolues: on dispose, depuis le

début du xx^e siècle, d'un système d'axiomes qui n'a fait apparaître jusqu'ici aucune contradiction dans les travaux des mathématiciens.

Cette théorie axiomatique des ensembles est juste un peu faible en ce sens qu'elle laisse définitivement sans réponse certaines questions élémentaires comme celle dite de «l'hypothèse du continu», que l'on explicitera plus loin. Améliorer la théorie pour qu'elle réponde mieux à ces questions, tel est l'objectif de ceux qui mènent aujourd'hui des recherches dans le domaine de la théorie des ensembles.

RÉPONDRE À DES QUESTIONS QUI ÉTAIENT A PRIORI SANS RÉPONSE

Or des résultats très intéressants ont été obtenus dans cette direction au cours de la dernière décennie, et l'un des principaux protagonistes de cette histoire est Hugh Woodin. Ce mathématicien travaillant aujourd'hui à l'université Harvard, aux États-Unis, a la profonde conviction que l'énigme de l'hypothèse du continu dispose d'une solution, c'est-à-dire que

L'INFINI DÉNOMBRABLE ET LE CONTINU

Pour comparer les tailles d'ensembles E_1 et E_2 constitués d'une infinité d'éléments, on cherche à savoir s'il existe une bijection (une correspondance biunivoque) entre les éléments de E_1 et ceux de E_2 . Si c'est le cas, on dit que E_1 et E_2 sont équipotents, ou qu'ils ont le même cardinal.

Un ensemble infini qui est équipotent à l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ des entiers naturels est dit «dénombrable». On constate aisément que, par exemple, l'ensemble des nombres pairs (a), l'ensemble des multiples de 5 (b), l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs (c) sont dénombrables. On peut aussi montrer facilement que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (ceux qui, comme $1/2$ ou $7/3$, peuvent s'écrire sous la forme p/q , où p et q sont des entiers) est dénombrable. Il en est de même de l'ensemble des couples (p, q) d'entiers, des triplets (u, v, w) de nombres rationnels, etc.

En revanche, l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 (par exemple) n'est

pas dénombrable. En voici une démonstration. Supposons que cet ensemble $[0, 1]$ soit dénombrable. On pourrait alors énumérer ses éléments un à un, ce qui donnerait une liste infinie (mais dénombrable) de nombres du type :

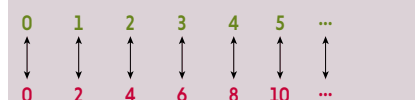
$0, d_{1,1} d_{1,2} d_{1,3} d_{1,4} d_{1,5} d_{1,6} \dots$
 $0, d_{2,1} d_{2,2} d_{2,3} d_{2,4} d_{2,5} d_{2,6} \dots$
 $0, d_{3,1} d_{3,2} d_{3,3} d_{3,4} d_{3,5} d_{3,6} \dots$
 $0, d_{4,1} d_{4,2} d_{4,3} d_{4,4} d_{4,5} d_{4,6} \dots$
 $\dots$

où les $d_{i,j}$, $d_{i,2}$, $d_{i,3}$, etc. sont les chiffres du développement décimal du i -ième nombre de la liste (on exclut ici les développements décimaux qui se terminent par une infinité de 9). Formons alors un nombre $x = 0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$ tel que $d_1 \neq d_{1,1}$, $d_2 \neq d_{2,2}$, $d_3 \neq d_{3,3}$, etc. (en évitant

de choisir 9 pour les d_i). On constate que x ne figure pas dans la liste ci-dessus (car quel que soit n , sa n -ième décimale diffère de la n -ième décimale du n -ième nombre de la liste), alors que x est bien un nombre réel compris entre 0 et 1. Cette contradiction montre que l'hypothèse de départ, à savoir que l'ensemble $[0, 1]$ est dénombrable et donc que ses éléments sont énumérables par une liste, est fautive.

Ainsi, les nombres réels compris entre 0 et 1 ne sont pas dénombrables. Leur infinité est d'un ordre supérieur à celle de $\mathbb{N}$ et l'on parle de l'infini continu, les nombres réels pouvant être représentés par les points d'une ligne continue. Cette représentation géométrique des nombres permet d'ailleurs de voir facilement que l'intervalle $[0, 1]$ est équipotent à, par exemple, l'intervalle $[0, 5]$: deux intervalles de longueurs différentes ont la même infinité de points (d)... On peut aussi démontrer des choses plus étonnantes, par exemple que la surface d'un carré, ou le volume d'un cube, contient la même infinité de points qu'un segment de droite.

a L'ensemble des nombres pairs est dénombrable



b L'ensemble des multiples de 5 est dénombrable



c L'ensemble des entiers relatifs est dénombrable



d L'ensemble des points d'un segment de longueur 1 est équipotent à l'ensemble des points d'un segment de longueur 5



L'HYPOTHÈSE DU CONTINU ET LES GRANDS CARDINAUX

L'hypothèse du continu, ou HC, a été considérée la première fois par Georg Cantor. Elle affirme qu'entre l'infini des nombres entiers (l'infini dénombrable) et l'infini des nombres réels (le continu), il n'existe pas d'autre infini.

Aucune intuition claire ne s'impose à propos de la vérité ou de la fausseté de HC. Ce n'est pas le cas pour les axiomes dits « de grands cardinaux », qui affirment l'existence d'ensembles infinis très grands, comme celle d'un ensemble qui, en taille, dépasserait chacun des infinis de la liste $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ...

On connaît une série d'axiomes de grands cardinaux. On les considère vrais *a priori*, car les refuser reviendrait à limiter l'infini, ce qui semble absurde.

Ces axiomes permettent de prouver des résultats qu'on ne peut pas obtenir sans eux, et conduisent

même à démontrer des résultats portant sur les nombres entiers. Le mathématicien Alexandre Grothendieck a utilisé de tels axiomes dans ses travaux sur la théorie des catégories, et la démonstration du grand théorème de Fermat (selon lequel il n'existe pas d'entiers positifs x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$ dès que l'entier n est supérieur à 3), au moins dans un premier temps, semblait ne pas pouvoir s'en dispenser.

On a espéré que certains axiomes de grands cardinaux auraient pour conséquence HC ou non-HC, ce qui aurait résolu l'énigme de l'hypothèse du continu. On a malheureusement établi que cela ne pouvait pas être le cas. On est donc reparti à la recherche de nouveaux axiomes naturels qui fixeraient la vérité ou la fausseté de HC.



Georg Cantor (1845-1918)

soit cette hypothèse est vraie, soit elle est fausse: elle ne devrait pas être «indécidable». Cela l'a conduit à proposer et à faire avancer deux programmes de recherche opposés.

Le premier devait établir que l'hypothèse du continu est fausse. Il y a quinze ans, Hugh Woodin croyait possible son aboutissement. Mais il a changé d'avis et lancé un second programme de recherche qui porte sur ce qu'on dénomme le «L ultime» et qui, selon lui, conduira à une solution satisfaisante et définitive des principales énigmes posées par l'infini – notamment à la preuve que l'hypothèse du continu est vraie.

C'est cette voie vers le L ultime que je vais tenter d'expliquer dans ses grandes lignes. Revenons un peu en arrière pour comprendre les termes du problème.

Découverte par Cantor et publiée en 1891, la vérité la plus simple concernant l'infini mathématique est qu'il en existe plusieurs sortes. De façon plus générale, le théorème de Cantor

indique qu'à chaque fois que l'on considère un ensemble infini E , l'ensemble de ses parties (ou sous-ensembles), noté $\mathcal{P}(E)$, est d'une taille infinie strictement supérieure à celle de E . Cela signifie que $\mathcal{P}(E)$ ne peut pas être mis en correspondance biunivoque, ou bijection, avec E .

Ainsi, l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ est strictement plus petit que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ de ses parties, qui comprend par exemple $\mathbb{N}$ lui-même, l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres premiers, l'ensemble des puissances de 2, etc. Il y a dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ trop d'éléments pour qu'on puisse les mettre en bijection avec ceux de $\mathbb{N}$.

Et en répétant l'opération, c'est-à-dire en considérant la suite $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$, etc., on dispose, grâce au théorème de Cantor, d'une infinité d'ensembles infinis différents et de plus en plus grands.

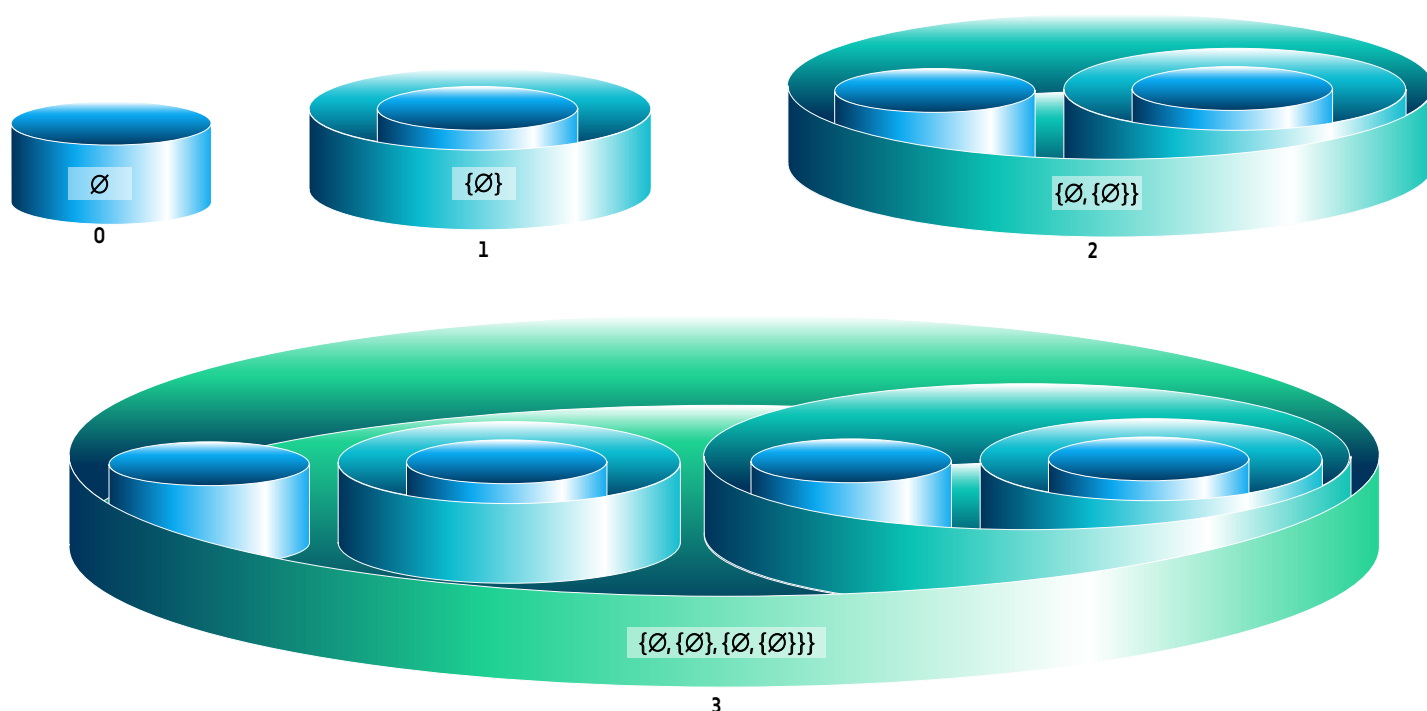
L'HYPOTHÈSE DU CONTINU: PAS D'INFINI INTERMÉDIAIRE ENTRE CELUI DE $\mathbb{N}$ ET CELUI DE $\mathbb{R}$

L'infini des entiers naturels, $\mathbb{N}$, est le plus simple et le plus petit qui existe. On l'appelle l'infini dénombrable, et tout ensemble infini qui peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit «dénombrable» (voir l'encadré page précédente). Un infini d'ordre supérieur est celui de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, comme on l'a vu. On peut en donner une représentation moins abstraite: cet infini est le même que celui de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, car on démontre assez facilement qu'il existe une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$.

Sachant que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou $\mathbb{R}$ est un ensemble strictement plus «grand» que $\mathbb{N}$, se pose la question suivante: existe-t-il des infinis intermédiaires entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$? Les mathématiciens n'en ont jamais rencontré, et ils ont donc été amenés à supposer que de tels infinis intermédiaires n'existent pas: telle est l'hypothèse du continu, posée à l'origine par Cantor. Ici, le mot «continu» évoque l'infinité des nombres réels, ces nombres pouvant être représentés par les points d'une ligne continue.

Autrement dit, l'hypothèse du continu affirme que tout sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ est soit en bijection avec $\mathbb{N}$ (si c'est un «petit» infini), soit en bijection avec $\mathbb{R}$ lui-même (si c'est un «gros» sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$).

L'hypothèse du continu constitue la plus simple des questions non résolues concernant les infinis. On la juge importante et, d'ailleurs, le mathématicien allemand David Hilbert l'avait placée en tête de sa célèbre liste des 23 grands problèmes présentée en 1900 au Congrès international des mathématiciens, à Paris. Plus d'un siècle après sa formulation, nul n'a su résoudre définitivement la question: on n'a jamais rencontré de partie infinie de $\mathbb{R}$ qu'on ne sache pas mettre en bijection avec $\mathbb{N}$ ➤



> ou avec $\mathbb{R}$, mais on n'a pas démontré qu'une telle partie n'existait pas.

Les logiciens ont cependant obtenu d'intéressants résultats qui, dans un premier temps, ont aggravé le mystère. Ils portent sur la théorie des ensembles telle qu'elle a été formalisée au début du xx^e siècle et qui repose sur un système d'axiomes élaboré par plusieurs chercheurs, en particulier les Allemands Ernst Zermelo et Abraham Fraenkel. Ce système d'axiomes est noté ZFC d'après les initiales de ces derniers, le C représentant l'axiome du choix, un axiome au statut particulier (il stipule qu'étant donnée une collection d'ensembles non vides, il existe toujours un ensemble ayant exactement un élément commun avec chacun de ces ensembles).

Or en 1938, le logicien autrichien Kurt Gödel a prouvé que si la théorie des ensembles construite sur ZFC est non contradictoire (c'est-à-dire qu'elle ne conduit pas à une affirmation et son contraire), alors elle ne peut pas démontrer que l'hypothèse du continu est fausse. En d'autres termes, si l'on note HC l'hypothèse du continu («Il n'existe pas d'infini intermédiaire entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ ») et non-HC sa négation («Il existe un infini intermédiaire entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$ »), la théorie ZFC ne peut pas démontrer non-HC.

La surprise est surtout venue en 1963 de la preuve apportée par le mathématicien américain Paul Cohen que si la théorie ZFC n'est pas contradictoire, alors elle ne peut pas démontrer l'hypothèse du continu. Ce résultat et celui de 1938 montrent donc que HC est logiquement indépendante des axiomes ZFC.

En d'autres termes, l'hypothèse du continu est un énoncé «indécidable» de la théorie ZFC.

Une interprétation possible de cette indépendance vis-à-vis des axiomes ZFC est que les mathématiciens ont le choix de faire ce qui leur plaît : ajouter l'hypothèse du continu, HC, comme axiome à leur théorie, ou ajouter sa négation, non-HC. Mais cette interprétation est incompatible avec l'idée qu'il existe une réalité ensembliste unique, et Gödel la refusait donc (voir l'encadré page 34). Pour lui, l'indécidabilité de l'hypothèse du continu dans la théorie ZFC signifiait que les axiomes ZFC ne donnent pas une description complète de cette réalité ensembliste à laquelle, comme beaucoup de mathématiciens, il croyait. D'où un programme : trouver de nouveaux axiomes et les ajouter à ZFC jusqu'à ce qu'ils permettent de savoir si l'hypothèse du continu est vraie ou non.

AJOUTER DE NOUVEAUX AXIOMES POUR LEVER L'INDÉCIDABILITÉ

Certains axiomes envisagés pour compléter ZFC, y compris par Gödel lui-même, ne sont pas satisfaisants, car les axiomes doivent avoir un fondement intuitif. C'est d'ailleurs pourquoi ajouter HC ou non-HC comme axiome n'est pas considéré comme une solution : notre intuition ne nous souffle rien de vraiment clair concernant HC. Trouver de bons axiomes est tout le problème.

Pour comprendre les idées nouvelles introduites par Hugh Woodin, il nous faut maintenant expliquer brièvement de quoi est fait l'univers ensembliste découvert par Cantor.

Une représentation imagée des premiers « entiers de von Neumann », c'est-à-dire des nombres entiers tels qu'on les définit en termes d'ensembles.

ORDINAUX ET L ULTIME

Les ordinaux sont une généralisation des nombres entiers, très différente de celle que constituent les nombres réels. Ils constituent une façon de prendre au sérieux les infinis et de les ordonner. Après la série ordonnée des nombres entiers, on considère qu'il existe un nouveau nombre, noté ω . On ne s'arrête pas là et on considère que, de la même façon qu'après 0 il y a 1, après ω il y a $\omega + 1$, puis $\omega + 2$, etc. Au-delà de cette deuxième série infinie, il y a $\omega \cdot 2$, puis $\omega \cdot 3$, etc. L'image ci-dessous est une tentative de représentation des ordinaux.

Définissables à partir de l'ensemble vide (voir le texte de l'article), ces ordinaux constituent une structure qu'on essaie de comprendre depuis que Cantor les a

découverts. On les utilise en particulier pour définir des ensembles V_α de plus en plus grands, dont on montre qu'ils forment l'univers ensembliste dans sa totalité, noté V .

En jouant avec la définition des V_α , on construit des sous-univers du monde ensembliste (on parle de « modèles internes ») qui, bien que plus petits que V , en ont les propriétés fondamentales. C'est avec l'un de ces sous-univers, noté L , que Gödel a montré que la théorie usuelle des ensembles est compatible avec l'hypothèse du continu, HC. Mais Paul Cohen a montré qu'elle était aussi compatible avec non-HC. L'idée utilisée pour définir L a été reprise sous le nom de « L ultime » et semble mener vers une solution concernant HC qui, finalement, serait vraie.

La colonne vertébrale de cet univers est donnée par la suite des « ordinaux », qui sont les nombres permettant de compter dans un ordre progressif les éléments d'un ensemble, qu'il soit fini ou infini. Le début de cette suite est composé des nombres entiers naturels, définis sous une forme ensembliste et nommés dans ce contexte « entiers de von Neumann ». Ils se construisent en partant de l'ensemble vide (celui qui ne contient rien), noté $\emptyset$, en posant : $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ..., $n+1 = n \cup \{n\}$, ..., où $\cup$ est le symbole désignant la réunion de deux ensembles (voir la figure page précédente). Dans cette représentation, l'entier n est donc constitué des entiers allant de 0 jusqu'à $n-1$.

L'UNIVERS ENSEMBLISTE : UNE CHAÎNE INFINIE ET CUMULATIVE

Les ordinaux ne s'arrêtent pas aux entiers. Le premier ordinal infini – on dit aussi transfini – est obtenu en prenant d'un coup tous les entiers, et est noté ω (oméga) :

$$\omega = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

On peut alors poursuivre : $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$, $\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$, etc. On arrive ainsi à $\omega + \omega$, noté $\omega \cdot 2$, puis, plus loin, à $\omega \cdot 3$, et ainsi de suite. Plus loin encore, on obtient ω^2 , ω^3 , ..., ω^ω , ... (voir l'encadré ci-contre).

Notons qu'il y a deux sortes d'ordinaux : ceux qui ont un prédécesseur, par exemple $\omega + 1$ ou $\omega^3 + 32$, et ceux qui n'en ont pas, par exemple ω , $\omega \cdot 2$ ou ω^4 . Ces derniers sont appelés « ordinaux limites ».

Avec les ordinaux et l'opération $\mathcal{P}$ qui, à un ensemble E , associe l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties, on obtient une hiérarchie d'ensembles emboîtés qui sera le centre de notre discussion. On pose :

$$V_0 = \emptyset;$$

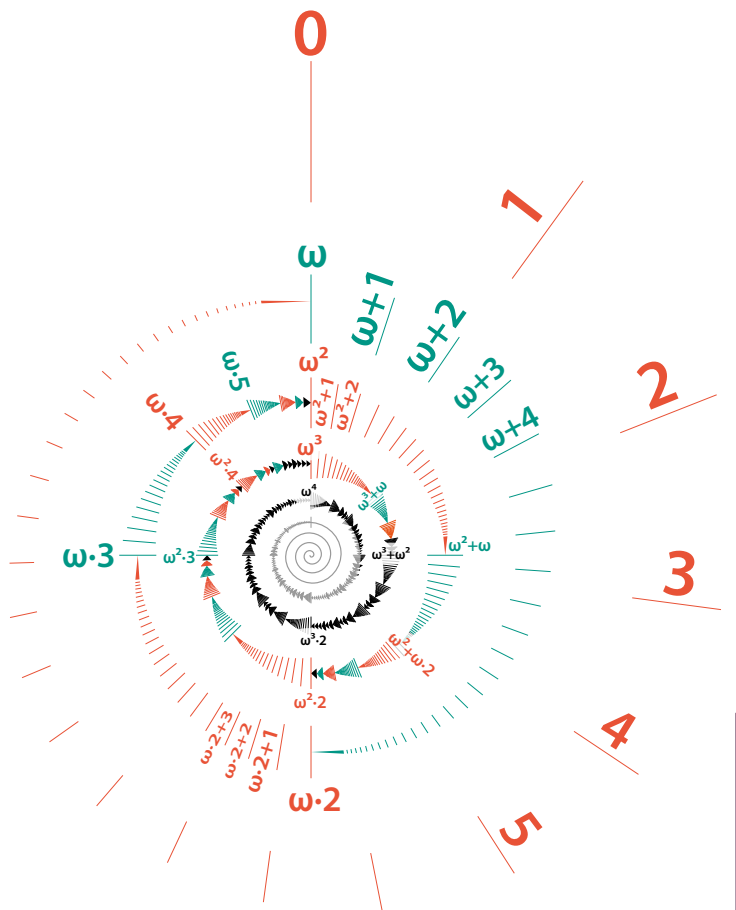
$V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ si $\alpha+1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α ;

V_β = la réunion de tous les V_α tels que $\alpha < \beta$, si β est un ordinal limite.

Les V_α sont donc des ensembles d'ensembles de plus en plus grands. Ils constituent la totalité du monde ensembliste. En effet, la théorie ZFC permet de démontrer que tout ensemble est dans l'un des V_α . Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est dans V_ω , tandis que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'apparaît que plus loin, et l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ des parties de $\mathbb{R}$ encore un peu plus loin, etc.

On note alors V l'univers ensembliste obtenu en prenant tous les V_α . Puisque tout ensemble est dans l'un des V_α , tout provient de l'ensemble vide $\emptyset$: le monde ensembliste n'est constitué que du vide et de ce que sa présence implique...

Revenons maintenant à la preuve par Gödel, en 1938, que non-HC ne résulte pas des >



> axiomes ZFC. Gödel a utilisé pour ce faire un procédé dont l'idée est facile à comprendre... même si tous les détails ne le sont pas ! Son point de départ était l'hypothèse que la théorie ZFC n'est pas contradictoire. En vertu de son théorème de complétude démontré en 1929 (voir l'encadré ci-contre), il existe alors une structure vérifiant tous les axiomes ZFC. Gödel en a déduit une autre structure vérifiant tous les axiomes ZFC et vérifiant aussi l'hypothèse du continu. Ce qui montre que le système ZFC+HC est non contradictoire – et donc que l'on ne peut pas déduire non-HC du système ZFC (en effet, si de ZFC on pouvait déduire non-HC, on pourrait aussi déduire non-HC du système ZFC+HC, lequel donnerait alors à la fois HC et non-HC, ce qui serait contradictoire).

Comment Gödel a-t-il obtenu la structure en question ? L'idée de la méthode est analogue à celle souvent utilisée en algèbre où, partant d'une structure qui vérifie par exemple les axiomes de groupe, comme l'ensemble des nombres réels muni de l'opération d'addition, on considère tous les éléments dont l'existence se déduit de celle d'un élément particulier ; ainsi, si l'on choisit le nombre 1, on en déduit la sous-structure constituée de 1, -1, 1+1, 1+1+1, etc., qui est le « sous-groupe engendré par 1 ». Dans cet exemple, ce procédé donne $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.

PASSER PAR UN UNIVERS ENSEMBLISTE PLUS RESTREINT

Autrement dit, l'idée est de partir d'une structure vérifiant certains axiomes et d'en déduire une structure plus petite qui les vérifie aussi et qui, éventuellement, a d'autres propriétés intéressantes.

La méthode de Gödel part donc de l'univers V décrit plus haut et vérifiant les axiomes ZFC. Pour définir une sous-structure, qui sera notée L , il s'est inspiré de la définition des V_α en la modifiant légèrement :

$$L_0 = \emptyset;$$

$L_{\alpha+1} = \mathcal{P}_{\text{def}}(L_\alpha)$ si $\alpha+1$ est un ordinal ayant pour prédécesseur α ;

L_β = la réunion de tous les L_α tels que $\alpha < \beta$, si β est un ordinal limite.

Ici, $\mathcal{P}_{\text{def}}(E)$ désigne l'ensemble des parties constructibles de l'ensemble E , c'est-à-dire définissables par une formule – une expression écrite dans le langage formel de la théorie des ensembles et dont les paramètres sont dans E . Si l'on prend, mettons, l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, un exemple simple de partie constructible de $\mathbb{N}$ est l'ensemble X constitué des éléments x de $\mathbb{N}$ tels qu'il existe un y de $\mathbb{N}$ vérifiant $x+y=5$ (tout cela peut se traduire par une formule). On a dans ce cas $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La différence entre $\mathcal{P}_{\text{def}}(E)$ et $\mathcal{P}(E)$ provient de ce que, en général, certaines parties

d'un ensemble E n'ont pas une définition permettant de les caractériser. Par exemple, il n'existe qu'une infinité dénombrable de parties définissables de $\mathbb{N}$ (car il n'y a qu'une infinité dénombrable de formules), alors qu'il existe une infinité non dénombrable de parties de $\mathbb{N}$.

La réunion de tous les L_α , notée L , est l'« univers des ensembles constructibles ». C'est un univers ensembliste inclus dans V , dans lequel tous les axiomes ZFC sont vrais. Le point important démontré par Gödel est que, dans L , l'hypothèse du continu est vraie. La méthode de Gödel montre donc que, partant d'une structure qui vérifie ZFC, on sait en trouver une sous-structure qui vérifie ZFC+HC ; par conséquent, elle prouve que si ZFC est non contradictoire, alors ZFC+HC est non contradictoire.

STRUCTURES ET « CONSISTANCE RELATIVE »

Un résultat de base pour travailler sur les systèmes axiomatiques est le théorème de complétude, que Kurt Gödel a prouvé en 1929 dans sa thèse de doctorat, avant de démontrer ses fameux théorèmes d'incomplétude.

Le théorème de complétude affirme qu'une théorie définie par des axiomes logiques est non contradictoire si et seulement s'il existe au moins une structure qui satisfait tous ses axiomes.

Par exemple, l'axiome « pour tout x , il existe un y tel que $x < y$ » est non contradictoire, car, en considérant la structure $\mathbb{N}$ (les entiers naturels) avec pour relation $<$ la relation d'ordre habituelle sur les entiers, on voit que l'axiome est satisfait.

Dans le cas d'un système d'axiomes plus compliqué, il n'est bien sûr pas aussi facile de proposer une structure satisfaisant le système d'axiomes. Pour la théorie des ensembles, on se rabat sur la méthode

dite « de consistance relative » : on suppose qu'un système S d'axiomes est non contradictoire ; on en déduit, par le théorème de complétude, qu'il existe une structure M satisfaisant tous les axiomes de S ; on modifie M en M' pour que M' vérifie un axiome de plus, noté X ; l'existence de cette structure M' montre que le système $S + X$ est non contradictoire. Cette construction démontre donc l'implication : S est non contradictoire $\Rightarrow S + X$ est non contradictoire.

C'est la méthode utilisée par Kurt Gödel et Paul Cohen pour démontrer que : ZFC est non contradictoire $\Rightarrow$ ZFC + HC est non contradictoire (Gödel, 1938) et que : ZFC est non contradictoire $\Rightarrow$ ZFC + non-HC est non contradictoire (Cohen, 1963).



Kurt Gödel (1906-1978)

Ce résultat de Gödel suggère que l'on pourrait ajouter au système ZFC l'axiome affirmant que tout ensemble est constructible, ce qui s'écrit $V=L$, et alors l'hypothèse du continu serait vraie. L'axiome $V=L$ pourrait donc, à première vue, être l'axiome recherché pour compléter ZFC et lever l'indécidabilité de HC. Mais il faudrait pour cela avoir des arguments forts incitant à l'admettre. L'argument que tout ensemble doit être définissable à partir de ceux qui viennent avant lui est une justification intuitive; Gödel l'a peut-être envisagé lui-même. Malheureusement, nous allons voir que l'idée de prendre $V=L$ comme nouvel axiome n'est finalement pas défendable.

Aux yeux d'un mathématicien convaincu que les ensembles existent et qu'il existe donc une vérité unique les concernant, on ne peut pas envisager d'ajouter comme axiome n'importe quelle formule indécidable de ZFC (une « formule », dans le contexte de la logique, est un énoncé). Un nouvel axiome doit affirmer une propriété dont nous percevons le sens et qui s'impose à partir de l'idée que nous nous faisons des ensembles. Le fait qu'un axiome possible n'introduise pas de contradiction ne suffit pas pour qu'on l'adopte.

L'exemple le plus simple pour le comprendre est ce qui se passe avec le second théorème d'incomplétude de Gödel, publié en 1931. Ce théorème indique que la non-contradiction d'un système S assez puissant pour englober l'arithmétique usuelle (par exemple le système ZFC), si elle est vraie, ne peut pas se démontrer dans le système S lui-même. Cela signifie que l'on peut ajouter à S l'affirmation « S est contradictoire » sans que cela introduise de contradiction. Il serait pourtant absurde de le faire, puisqu'en adoptant et en utilisant le système S , on suppose *a priori* qu'il est non contradictoire!

TENIR COMPTE DES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX

Les critères permettant de juger si une formule (un énoncé) peut être ajoutée ou non comme axiome font l'objet de discussions délicates. Une idée cependant fait l'unanimité: si une formule affirme l'existence de grands ensembles infinis et qu'elle n'introduit pas de contradiction, alors il faut l'accepter. S'il existe vraiment un univers des ensembles, alors celui-ci est aussi grand que cela est possible et il faut donc accepter tout ce qui affirme qu'il est grand.

On connaît depuis longtemps des affirmations exprimant l'existence de très grands ensembles infinis, que l'on dénomme « axiomes de grands cardinaux ». Le premier de ces énoncés est l'axiome de l'infini, selon lequel il existe un ensemble infini (axiome dont un énoncé possible est: « Il existe un ensemble pouvant être mis en bijection avec une de ses parties propres [c'est-à-dire non identiques à lui-même] »). La définition précise de ces axiomes dépasse le cadre de cet article, mais il faut savoir qu'ils sont nombreux et font intervenir divers types de grands ensembles (cardinaux « inaccessibles », cardinaux « mesurables », cardinaux « supercompacts », etc.). Ils jouent dans l'étude de l'infini un rôle dont nous verrons plusieurs aspects (voir l'encadré page 36).

Or un miracle se produit à propos des grands cardinaux. Bien que les propriétés qui les définissent soient sans rapport direct les unes avec les autres, et qu'*a priori* il aurait pu se produire que deux grands cardinaux distincts ne soient pas comparables (c'est-à-dire qu'aucun des deux ne soit plus grand que l'autre), cela ne se produit jamais: les grands cardinaux se rangent en une ligne ordonnée qui va du plus petit vers le plus grand.

Hugh Woodin et de nombreux mathématiciens voient dans ce fait un argument pour croire que les ensembles existent réellement et que ce ne sont pas des fictions: si derrière les formules qui définissent les grands cardinaux ne se trouvait aucune réalité, leur

RÉALISME SIMPLE OU RÉALISME PLURALISTE ?

En philosophie des mathématiques, les réalistes soutiennent que le monde mathématique existe et que le travail du mathématicien consiste à découvrir les vérités de ce monde. Puisque les théories les plus puissantes et les plus utilisées sont fondées sur les notions ensemblistes et que tout, d'une certaine façon, s'y ramène, il est assez naturel aujourd'hui d'affirmer le réalisme mathématique en le fondant sur la théorie des ensembles, c'est-à-dire en défendant l'idée que les ensembles, et en particulier les ensembles infinis, existent bel et bien.

Face au problème de l'hypothèse du continu (HC)

et de son indécidabilité relativement aux axiomes usuels de la théorie des ensembles, une version du réalisme ensembliste soutient que l'univers des mathématiques existe sous une multitude de formes. Dans certaines, l'hypothèse du continu est vraie, dans d'autres, elle est fausse. Ce « multivers ensembliste » dispenserait de rechercher une valeur de vérité (« vrai » ou « faux ») à l'hypothèse du continu. Hugh Woodin oppose à cette version trop facile de réalisme des arguments techniques montrant que, dans le prétendu multivers, aucune notion de vérité satisfaisante ne trouve place. Pour lui, comme pour Gödel, il n'existe qu'un seul univers ensembliste, dont on doit trouver les bons axiomes, ce à quoi il travaille avec acharnement, en soutenant que la voie ouverte par le « L ultime » a de bonnes chances de régler le problème une fois pour toutes.

> alignement selon un ordre bien déterminé serait incompréhensible.

On a espéré trouver un axiome de grand cardinal qui ait un effet sur l'hypothèse du continu, mais on a montré plus tard que c'est impossible. La solution du problème posé par l'hypothèse du continu ne peut donc pas provenir directement des grands cardinaux.

Qui plus est, la prise en compte des grands cardinaux condamne sans appel l'axiome $V=L$, évoqué plus haut, comme solution possible à l'énigme de l'hypothèse du continu. En 1961, le mathématicien et informaticien américain Dana Scott a en effet prouvé que si l'on adopte comme axiome $V=L$, alors les cardinaux «mesurables» ne peuvent pas exister.

Ce résultat signifie donc que l'on ne peut pas à la fois adopter tous les axiomes de grands cardinaux, comme on croit nécessaire de le faire, et adopter l'axiome $V=L$. Hugh Woodin n'hésite pas à dire que le résultat de Dana Scott signifie que $V=L$ est une affirmation fausse.

UNE VARIANTE DE L COMPATIBLE AVEC LES GRANDS CARDINAUX?

Pour trouver une issue, les mathématiciens et les logiciens ont alors considéré des variantes de L . Elles sont fondées sur des définitions utilisant le même principe que pour L : fixer une notion constructive pour passer d'un L_α à un $L_{\alpha+1}$, mais la choisir moins restrictive, de façon que les ensembles L_α soient plus grands que ceux définis par Gödel.

Cette idée a permis de résoudre le problème des cardinaux «mesurables», le logicien américain Robert Solovay ayant conçu en 1976 une version de L qui n'est pas en contradiction avec l'existence d'un tel cardinal. Ce nouveau L est malheureusement en contradiction avec d'autres axiomes de grands cardinaux plus élevés dans la hiérarchie. De ce fait, la variante de $V=L$ de Robert Solovay n'est pas plus recevable que celle de Gödel.

Ce processus d'élargissement de L a été répété plusieurs fois, mais à chaque étape, la nouvelle version de $V=L$ s'est révélée incompatible avec certains axiomes de grands cardinaux. La situation semblait donc bloquée.

En 2010, cependant, une avancée spectaculaire s'est produite. Hugh Woodin a démontré cette année-là que si l'on trouvait une variante de $V=L$ compatible avec l'existence d'un cardinal «supercompact», alors elle serait nécessairement compatible avec tous les axiomes de grands cardinaux.

On recherche donc aujourd'hui ce L miraculeux, dénommé « L ultime». On dispose de pistes sérieuses pour y parvenir, et surtout, on sait, grâce à un autre résultat de Hugh Woodin, que l'axiome $V=L$ ultime aurait pour conséquence que l'hypothèse du continu est vraie.

LE FORCING, UNE TECHNIQUE QUE L'AXIOME $V=L$ ULTIME NEUTRALISERAIT

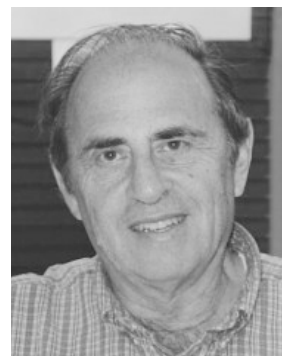
Le forcing est la méthode conçue par Paul Cohen pour démontrer que non- HC (la négation de l'hypothèse du continu) est compatible avec la théorie ZFC. Elle est extrêmement puissante, au point même que c'est gênant : elle permet de montrer non seulement que non- HC est compatible avec la théorie ZFC, mais aussi que HC l'est. Elle démontre donc à elle seule que HC est un énoncé indécidable de la théorie ZFC.

Qui plus est, le forcing s'applique à d'autres questions mathématiques importantes et montre que celles-ci (problème de Whitehead en théorie des groupes, conjecture de Kaplansky en analyse, problème de Suslin en combinatoire, conjecture de Borel en théorie de la mesure...) sont indécidables dans la théorie ZFC.

Ces indécidabilités confirment qu'il faut ajouter des axiomes au système ZFC, et les ajouter si possible de façon à rendre inopérant le forcing.

Un axiome X rend inopérant le forcing si l'on ne peut plus démontrer qu'à la fois HC (ou l'un des autres problèmes cités) et sa négation sont compatibles avec le système ZFC + X , autrement dit si l'ajout de X aux axiomes ZFC fixe une valeur de vérité à HC (ou à l'un des problèmes cités).

Hugh Woodin a pu établir que l'axiome $V=L$ ultime qu'il envisage serait compatible avec les axiomes de grands cardinaux, mais aussi qu'il rendrait inopérant le forcing. Ce serait donc un axiome en tout point satisfaisant pour supprimer le flou que ZFC laisse persister. La nouvelle théorie des ensembles démontrerait ainsi que l'hypothèse du continu est vraie, et serait d'après lui la plus raisonnable des théories des ensembles.



Paul Cohen (1934-2007)

Un argument supplémentaire soutient ce $V=L$ ultime: Hugh Woodin a montré en 2015 que cet axiome rendrait inopérant le forcing. Expliquons de quoi il s'agit. Pour démontrer que non- HC est compatible avec la théorie ZFC, la méthode de Paul Cohen s'appuie sur une technique nommée «forcing». Elle consiste, partant d'une structure vérifiant les axiomes ZFC, à en construire une autre qui vérifie ZFC+non- HC . Cette méthode est cependant très puissante et permet bien d'autres choses. Notamment, le forcing permet de construire, comme la méthode de Gödel, une structure qui vérifie ZFC et HC . En clair, le forcing est une méthode qui, à elle seule, montre l'indécidabilité de l'hypothèse du continu dans le système ZFC. Mieux, elle s'applique aussi à d'autres énoncés de mathématiques en algèbre, en analyse, etc., dont elle

montre l'indécidabilité dans la théorie ZFC (voir l'encadré ci-dessous).

Pour Hugh Woodin, la situation créée par ces indécidables est très insatisfaisante: qu'est donc cette science – les mathématiques fondées sur les axiomes ZFC – incapable de dire, pour nombre de ses énoncés, s'ils sont vrais ou faux? Cette situation suggère un nouveau critère pour juger si l'ajout au système ZFC d'un axiome X est bienvenu ou non: l'ajout sera bienvenu s'il rend inopérant le forcing de Paul Cohen, autrement dit si, en ajoutant X à ZFC, le forcing ne permet plus de choisir comme on veut entre l'hypothèse du continu et sa négation, ou, plus généralement, entre A et non-A pour les énoncés mathématiques A que le forcing montre indécidables dans la théorie ZFC.

Or l'axiome $V=L$ ultime rendrait inopérant le forcing, comme Hugh Woodin l'a montré. Avec le L ultime, une série de questions indécidables dans la théorie ZFC prendraient donc une valeur de vérité déterminée. Ainsi, le $V=L$ ultime attendu, qui serait compatible avec l'existence d'un cardinal supercompact, ne serait pas seulement un axiome compatible avec tous les axiomes de grands cardinaux (c'est une exigence *a priori*). Il limiterait aussi

l'impuissance des mathématiques fondées sur ZFC à déterminer, pour toute une classe intéressante d'énoncés, si ceux-ci sont vrais ou faux. C'est là un puissant faisceau de raisons pour adopter l'axiome $V=L$ ultime.

À LA RECHERCHE DU L ULTIME

La situation n'est pas réglée pour autant. En effet, il reste à trouver la bonne définition du L ultime, telle que l'axiome $V=L$ ultime soit compatible avec l'existence des grands cardinaux supercompacts. Plusieurs pistes sont aujourd'hui en cours d'exploration et l'on peut espérer que les mathématiciens disposeront bientôt d'un argument sérieux qui leur permettra enfin d'affirmer que l'hypothèse du continu est vraie, et qui lèvera aussi l'indécidabilité d'autres questions mathématiques.

Ces développements survenus depuis une dizaine d'années sont remarquables; ils confirment que la compréhension de l'infini est un travail mathématique qui progresse régulièrement et sensiblement. On constate que la découverte des vérités mathématiques ne consiste pas seulement à élaborer des démonstrations à partir d'axiomes évidents, faciles à formuler et jamais ➤

le CNRS a 80 ans!
masterclass

— vendredi 25, samedi 26, dimanche 27 octobre de 14h à 19h

cité
sciences et industrie

PROPOSÉ PAR AVEC LE SOUTIEN DE

© Cyril Fraillon / Ezo / Viate / J. L. Emerson / Luitz / Cédric / SCV / Inria / CNRS Photothèque

Nouveau(x) monde(s), le Forum du CNRS

Pour célébrer ses 80 ans le CNRS propose une édition spéciale de son Forum. Des scientifiques, des artistes et des auteurs sont invités à répondre à la question: comment la recherche peut réparer, réinventer ou ré-enchanter notre monde ?

des masterclass à ne pas manquer avec:

En solo: Alain Aspect, Gérard Berry, Monica Brinzei, Alain Connes, Thomas Ebbesen, Albert Fert, Jean-Gabriel Ganascia, Julie Grollier, Serge Haroche, Edith Heard, Jean-François Lutz, Alain Prochiantz, Jean-Loup Puget, Jacques Stern

En duo: Barbara Cassin et Sophie Calle, Alexandre Gefen et Minh Tran Huy, Jacques Maddaluno et Pierre Buraglio, Frédéric Keck et Hervé di Rosa, Roberto Casati et Larry Kagan

Cité des sciences et de l'industrie
30, avenue Corentin-Cariou - 75019 Paris
M Porte de la Villette ① 3b Cité des sciences et de l'industrie

Informations sur cite-sciences.fr

HUGH WOODIN ET LES GRANDS CARDINAUX

Pour Hugh Woodin (*ci-contre*), la hiérarchie des grands cardinaux (de grands ensembles infinis dont l'existence est posée par des axiomes complémentaires aux axiomes ZFC usuels de la théorie des ensembles) est aussi intrinsèque et absolue que celle des nombres entiers eux-mêmes. C'est selon lui une découverte majeure. Il est convaincu que les axiomes des grands cardinaux ne conduiront jamais à une contradiction, ce qui a pour conséquence que les énoncés qu'ils permettent de prouver sur les nombres entiers sont vrais, et que ces axiomes ont donc des conséquences concrètes, physiques. Il affirmait ainsi (dans « The transfinite universe », chapitre du livre collectif Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics, paru en 2011) : « Dans les dix mille ans à venir, on ne trouvera aucune contradiction au sein de ces théories [affirmant l'existence de grands cardinaux]. Il s'agit d'une prédiction spécifique et non ambiguë sur l'univers physique. Elle ne se réduit à aucune vérité connue antérieurement. Cette prédiction découle du développement de la théorie des ensembles au cours des cinquante dernières années [...]. Elle se fonde sur ma conviction que la conception de l'univers transfini est pleinement sensée. Je fais cette prédiction indépendamment de toute spéculation sur les dispositifs informatiques susceptibles d'être développés au cours des dix mille prochaines années et qui pourraient avoir des effets sur l'efficacité de la recherche en mathématiques. »



➤ remis en cause, mais qu'elle est aussi le résultat d'une discussion et d'un affinement de notre conception de l'infini.

Cette discussion se nourrit à la fois de théorèmes et de points de vue qui renforcent notre intuition. Certaines options s'offrant aux mathématiciens sont ainsi éliminées non pas parce qu'on démontre qu'elles sont logiquement absurdes, mais parce qu'elles ne sont pas intellectuellement satisfaisantes – comme adopter brutalement l'axiome $V=L$. L'infini mathématique se montre intelligible et, comme pour d'autres sciences, nos connaissances dans ce domaine s'enrichissent d'année en année.

DES TRAVAUX ABSTRAITS AUX CONSÉQUENCES CONCRÈTES

Par ailleurs, considérant ces avancées de la théorie des ensembles depuis un demi-siècle, Hugh Woodin défend l'idée que la théorie des grands cardinaux et les travaux sur l'axiomatisation complémentaire de ZFC ne sont pas un travail purement abstrait, hors du monde. La compréhension nouvelle qu'ils donnent de l'infini a, selon lui, des « conséquences physiques ». Expliquons son point de vue.

Les axiomes de grands cardinaux se classent les uns par rapport aux autres et quand un axiome X est plus fort que l'axiome Y , alors X permet de prouver l'énoncé affirmant « le système $ZFC+Y$ est non contradictoire ». Or un tel énoncé s'exprime dans la théorie par une suite de symboles, et savoir s'il se

démontre n'est qu'une question combinatoire, que l'on sait toujours traduire en question portant sur les nombres entiers. Même si c'est étonnant, les axiomes de grands cardinaux ont donc des conséquences sur ce qu'on sait démontrer concernant les nombres entiers : l'infini joue sur le fini et plus on a d'infinis, plus on en sait sur le fini.

Ces effets sur les énoncés arithmétiques sont, d'une certaine façon, des effets physiquement testables. Penser qu'un axiome de grand cardinal X est acceptable – et Hugh Woodin clame que c'est le cas de beaucoup d'entre eux – signifie qu'en faisant fonctionner la théorie $ZFC+X$, on est certain qu'on ne tombera jamais sur une contradiction.

Or faire fonctionner une théorie, c'est dérouler les conséquences de ses axiomes, tâche que l'on peut confier à une machine. Croire en l'existence d'un grand cardinal, c'est donc croire que les machines utilisant le système ZFC complété par l'axiome correspondant à ce grand cardinal ne produiront jamais de résultats contradictoires tels que $0=1$. C'est donc un énoncé qui porte sur le monde physique. Il provient uniquement de notre compréhension de l'infini. En d'autres termes, les progrès de la théorie des ensembles enrichissent ce que nous pouvons affirmer de l'infini et donc du monde physique. Ainsi, ces avancées des mathématiciens et des logiciens tissent un fil qui relie l'infini le plus grand à la réalité matérielle, allant des objets les plus abstraits aux objets les plus concrets. ■

BIBLIOGRAPHIE

H. Woodin, **In search of ultimate-L**, *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 23(1), pp. 1-109, 2017.

J. Cavitt, **Set-theoretic geology, the ultimate inner model, and new axioms**, thèse soutenue à l'université Harvard, 2017.

C. Rittberg, **How Woodin changed his mind : New thoughts on the Continuum Hypothesis**, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 69(2), pp. 125-151, 2015.

Conférence filmée de Hugh Woodin, 2015 :
<https://www.youtube.com/watch?v=nVF4N1Ix5WI>

M. Heller et H. Woodin, **Infinity : New Research Frontiers**, Cambridge University Press, 2011.

H. Woodin, **Strong axioms of infinity and the search for V**, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010*, World Scientific, pp. 504-528, 2011.

DES SUJETS D'ACTUALITÉ, DES LECTURES CAPTIVANTES



Michio KAKU

Physicien et futurologue, cofondateur de la théorie des cordes.

1^{re} éd. 2019 • 448 p. • 9782807322332 • **24 €**

Les dernières avancées et perspectives sur le cerveau humain.



Jamie BARTLETT

Journaliste et expert britannique en médias sociaux et technologie.

1^{re} éd. 2019 • 224 p. • 9782807322301 • **19,50 €**

Un essai passionnant sur les enjeux de la révolution numérique



Christian de PERTHUIS

Créateur de la Chaire d'économie du climat à l'université Paris Dauphine.

1^{re} éd. 2019 • 256 p. • 9782807322097 • **19,50 €**

Une course contre la montre pour le climat



William NORDHAUS

Prix Nobel d'économie 2018 pour ses travaux sur l'économie du climat.

1^{re} éd. 2019 • 352 p. • 9782807325296 • **24,90 €**

Risques, incertitudes et solutions économiques face à un monde en réchauffement.