

cytologiste René Couteaux (1909-1999), pionnier de la microscopie électronique en France, étudie les zones d'ancrage des vésicules, forgeant l'expression de « zone active » de la synapse, en étudiant le cycle d'exocytose et d'endocytose au niveau des synapses: les molécules de neurotransmetteur sont libérées par les vésicules (exocytose), avant d'être recyclées et stockées à nouveau dans des vésicules à l'intérieur des neurones (endocytose). Les travaux de Couteaux défendent clairement l'« hypothèse vésiculaire » de Katz, qui devient son ami, et chez lequel il effectuera un séjour. Finalement, un élève de Couteaux, le biochimiste Maurice Israël, isole des vésicules synaptiques contenant de l'acétylcholine à partir de l'organe électrique de la torpille... À propos de ce résultat, Katz adressa une lettre à René Couteaux en décembre 1968, écrivant qu'il s'agit là de son plus beau cadeau de Noël.

UNE PRÉDICTION TROUBLANTE

Et l'aventure continue... Toujours dans les années 1950, Katz met au point un nouveau type d'électrode qui permet de libérer à volonté, comme au compte-gouttes, des quanta d'acétylcholine: l'électrode est munie d'un circuit

électrique qui permet de contrôler la sortie d'ions d'acétylcholine! Au cours des années 1970, grâce à cette technique, il étudie de plus près encore les fluctuations spontanées du potentiel de repos de la fibre musculaire en présence d'acétylcholine. Des analyses statistiques de ce « bruit » conduisent à émettre l'hypothèse que les molécules d'acétylcholine relâchées par micropaquets provoquent l'ouverture de pores moléculaires dans la membrane postsynaptique. Il s'agit ni plus ni moins des canaux ioniques, que l'on découvrira une décennie plus tard grâce aux travaux des Allemands Erwin Neher et Bert Sakmann.

Aujourd'hui encore, l'étude du « bruit des neurones » révèle bien d'autres mécanismes fondamentaux et surprenants comme des mécanismes moléculaires nouveaux et de nouvelles propriétés de réseaux de neurones. Bert Sakmann a certainement eu raison d'écrire, dans son mémoire biographique, combien Katz fut heureux dans ses intuitions, notamment sur le bruit biologique, qui se sont aujourd'hui imposées comme des théories classiques des neurosciences. Le milieu du xx^e siècle aura bien été l'heure de gloire des quanta, dans tous les sens du terme! ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Ashmore, **Paul Fatt**, 13 January 1924-28 September 2014, *Biogr. Mems Fell. R. Soc.*, vol. 62, pp. 167-186, 2016.

J.-G. Barbara, **La Naissance du neurone**, Vrin, pp. 218-219, 2010.

B. Sakmann, **Sir Bernard Katz**, 26 March 1911-20 April 2003, *Biogr. Mems Fell. R. Soc.*, vol. 53, pp. 186-202, 2007.

J.-G. Barbara et T. Galli, **Fallait-il ignorer l'hypothèse non vésiculaire de la neurotransmission ?**, *Lettre des Neurosciences*, vol. 30, pp. 3-6, 2006.

un animal... des animots

cycle de conférences

— les jeudis à 19h



cité

sciences
et industrie

9 janvier

Langages, langues, dialectes animaliers : les dictionnaires des animaux

avec Astrid Guillaume, maître de conférences en sciences du langage, Sorbonne Université.

16 janvier

Sifflements, chants et gazouillis, mais que disent les oiseaux ?

avec Sébastien Derégnaucourt, éthologiste, professeur à l'université Paris-Nanterre.

23 janvier

Le langage n'est pas le propre de l'Homme, parole de singe !

avec Alban Lemasson, éthologiste, professeur, université de Rennes 1, université de Caen Normandie, CNRS.

30 janvier

Des clics et des clangs : le langage énigmatique des cachalots

avec François Sarano, océanographe, plongeur professionnel, cofondateur de l'association Longitude 181 Nature.

Cité des sciences et de l'industrie
30, avenue Corentin-Cariou - 75019 Paris
M Porte de la Villette 13b Cité des sciences et de l'industrie

Informations sur cite-sciences.fr

AVEC LE SOUTIEN DE **POUR LA SCIENCE** Cerveau & Psycho

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.86 Art & science
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

COMBINES POUR TÉTRADES

La combinatoire géométrique exige une patience et une minutie dont souvent seul l'ordinateur est capable. Le cas des tétrades est exemplaire.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Thomas Cabaret, un lecteur de la rubrique, m'a signalé un article de Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis, du département de mathématiques de l'université de Lettonie, à Riga. Bien que publié dans une revue assez confidentielle, l'article est très amusant et associe raisonnements géométriques astucieux pour certaines questions et calculs informatiques pour d'autres. Quelques résultats de ce bel article seront présentés ici, accompagnés d'autres sur le thème des groupes de formes géométriques ayant de multiples contacts.

Le mot «tétrade» existe en français et signifie une suite de quatre notes musicales, un groupe de quatre bits d'information, un alignement de quatre objets astronomiques, etc. Si nous voulons suivre les progrès récents en géométrie combinatoire, il faut ajouter à cette liste la définition suivante : une tétrade est une association de quatre formes planaires identiques et d'un seul tenant, chacune en contact avec toutes les autres par au moins un segment de droite ou de courbe. Le mot anglais *tetrad* a été introduit en anglais avec ce sens en 1975 par Michael Buckley.

Deux exemples de tétrade sont donnés dans l'encadré 1. Notons bien que chaque exemplaire de la forme touche les trois autres.

Que quatre formes planaires d'un seul tenant, identiques ou non, puissent se toucher deux à deux sur le plan est un maximum. Il est en effet impossible de trouver cinq formes du plan d'un seul tenant se touchant deux à deux. C'est une conséquence du théorème de théorie des graphes qui stipule que le graphe complet non orienté K_5 (cinq nœuds, chacun relié aux quatre autres) n'est pas planaire, c'est-à-dire ne peut pas être dessiné sur le plan sans que deux arcs se croisent (voir l'encadré 1). En effet, si cinq formes d'un seul tenant du plan se touchaient deux à deux, en les contractant chacune en un point et en représentant chaque contact entre deux formes par un arc joignant les points correspondants, on obtiendrait une représentation planaire de K_5 sans croisement des arcs... ce qui est impossible.

À TROIS DIMENSIONS

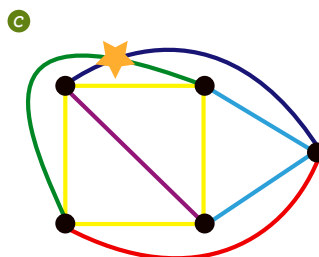
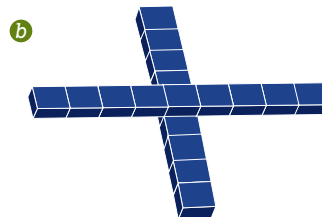
À trois dimensions, la situation est très différente, puisque pour tout entier n , il existe dans l'espace une forme F d'un seul tenant, et une disposition de n exemplaires de F telle >

1

TÉTRADES DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE

Un exemple de tétrade (a) : les quatre formes composant la figure sont identiques (on passe de l'une à l'autre par translation, rotation ou symétrie axiale) et chaque forme touche toutes les autres. Il est impossible de faire la même chose dans le plan avec 5 formes, car on en déduirait une représentation planaire sans croisement du graphe K_5 (chacun des cinq nœuds est lié à tous les autres), ce qui est impossible (b).

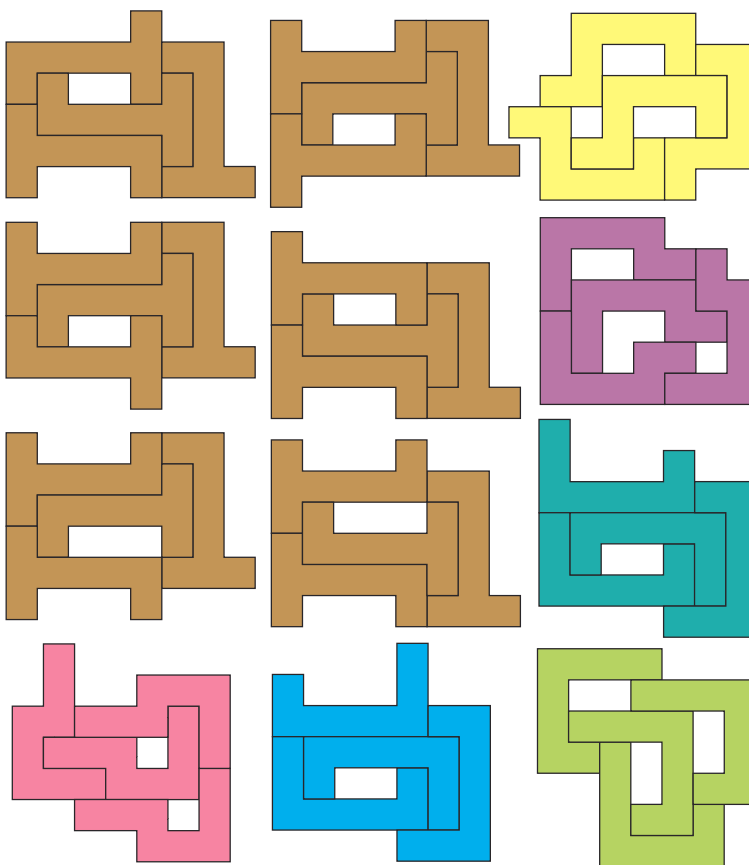
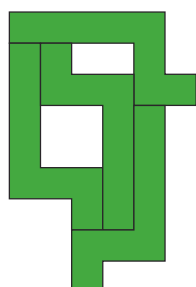
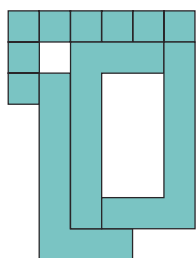
Dans l'espace, il existe des configurations de n formes identiques se touchant toutes. L'image d, due à Francisco De Comité, montre la solution pour $n = 5$: la configuration est constituée de 5 formes, chacune étant la réunion de deux barres de la même couleur (c). Cela se généralise à n formes.



2

LES PLUS PETITES TÉTRADES EN POLYOMINOS

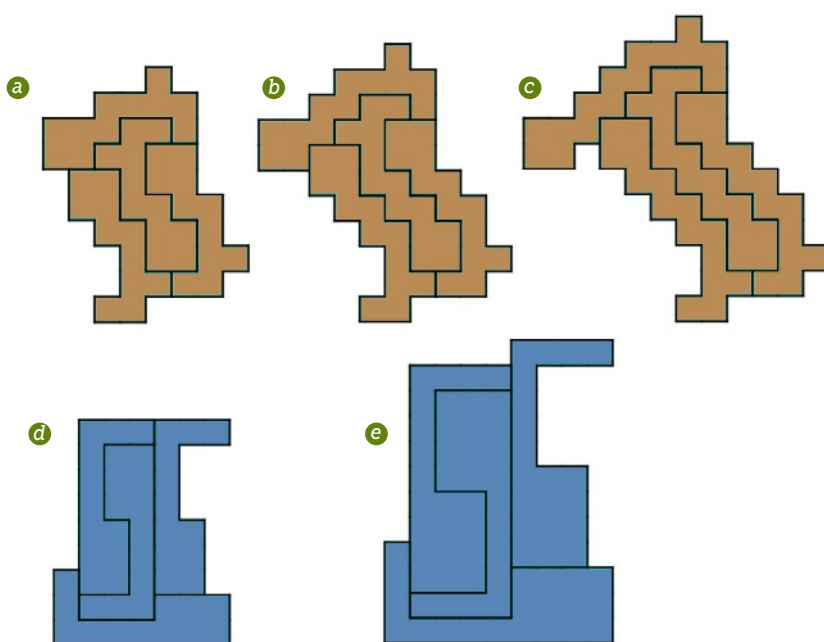
Toutes les tétrades faites avec des polyominos les plus petits possible (8 carrés par polyomino) sont montrées ici. On peut noter que certains polyominos donnent plusieurs tétrades distinctes.



3

TÉTRADES EN POLYOMINOS SANS TROU

Le plus petit polyomino donnant un tétrade sans trou est celui utilisé pour le dessin a.
La série de dessins a, b, c se prolonge de manière évidente et montre donc qu'il existe une infinité de tétrades sans trou faites de polyominos.
La série d, e se prolonge aussi de manière évidente et montre qu'il existe une infinité de tétrades sans trou faites de polyominos dont aucun n'est retourné pour assembler la tétrade.



n	Nombre de polyominos à n carrés	Nombre de polyominos à n carrés donnant une tétrade	Nombre de tétrades trouvées pour n	Nombre de tétrades sans trou trouvées pour n
8	369	8	14	0
9	1285	42	83	0
10	4 655	187	341	0
11	17 073	739	1 388	1
12	63 600	2 871	5 648	10
13	238 591	11 300	22 688	1
14	901 971	44 440	90 243	11
15	3 426 576	172 984	352 243	36
16	13 079 255	670 107	1 373 595	66
17	50 107 909	2 599 478	5 384 209	70

> que chaque exemplaire de F touche les $n-1$ autres. Un exemple de telle forme F est constitué de deux barres en croix (voir l'encadré 1, c) : on prend deux barres de $2n-1$ cubes collés en ligne; on colle perpendiculairement les deux barres par leur cube central. On dispose alors sans mal n copies de F en s'arrangeant pour que chacune touche par un morceau de surface toutes les autres (voir l'encadré 1, d).

On remarquera que cet assemblage dans l'espace montre que si l'on voulait colorier des cellules d'un seul tenant d'une partie de l'espace sans que deux cellules en contact portent la même couleur, le nombre de couleurs nécessaires serait infini. Le théorème des quatre couleurs du plan (on peut colorier toute carte plane avec quatre couleurs sans que deux pays voisins portent la même couleur) n'est donc généralisable dans l'espace ni avec 5 couleurs, ni avec n couleurs quel que soit l'entier n .

TÉTRADES DE POLYOMINOS

Concentrons-nous maintenant sur le plan et plus particulièrement sur les polyominos, qui sont les formes d'un seul tenant obtenues en accolant côté contre côté des carrés de même taille.

La figure a de l'encadré 1 montre une tétrade dont la forme de base est un polyomino de 9 carrés. Peut-on faire mieux, c'est-à-dire trouver une tétrade faite à partir de quatre polyominos utilisant chacun moins de 9 carrés? La réponse est positive et une recherche par ordinateur donne la liste exhaustive de toutes les tétrades utilisant quatre polyominos identiques comportant 8 carrés chacun (voir l'encadré 2).

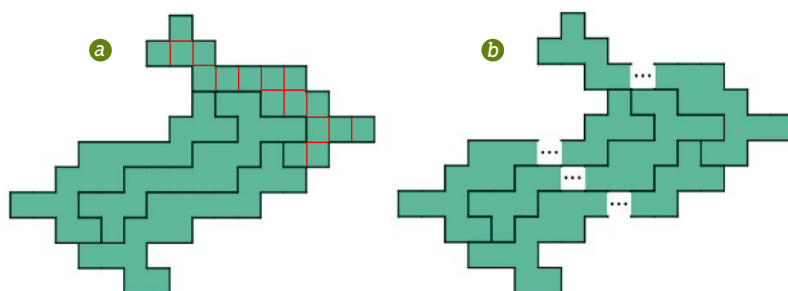
L'ordinateur indique aussi qu'il n'existe pas de polyominos plus petits permettant de composer une tétrade.

Le travail de l'ordinateur pour arriver à ces dessins et résultats est presque instantané, car il n'y a que 369 polyominos faits de 8 carrés et beaucoup moins pour les polyominos plus petits. Un humain voulant obtenir la liste complète de l'encadré 2 devrait sans doute travailler des jours entiers, et la démonstration complète qu'il n'y a pas d'autre solution que celles indiquées serait très longue. On ne peut cependant pas considérer que la réponse donnée par l'ordinateur sans justification constitue une démonstration, mais si plusieurs programmes indépendants arrivent au même résultat, personne ne doutera que nous disposons de la liste complète de tétrades faites de polyominos de 8 carrés; l'utilisation d'ordinateurs en mathématiques conduit à un consensus sur les résultats, mais ils sont parfois d'une nature différente de celui que donnent les démonstrations.

4

POLYOMINOS DE n CARRÉS FORMANT UNE TÉTRADE SANS TROU

Ces dessins (de Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis) montrent que pour tout entier $n \geq 17$, il existe des tétrades sans trou formées de polyominos de n carrés exactement. Les pointillés dans b représentent un nombre quelconque de carrés unités.



5

TOUTES LES FORMES DE TROUS SONT POSSIBLES

Il est évident qu'un trou dans une tétrade faite de polyominos sans trou a nécessairement la forme d'un polyomino sans trou. La réciproque (« Tout polyomino sans trou peut être un trou dans une forme constituant une tétrade ») est vraie, comme Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis l'ont démontré par un élégant raisonnement (voir la bibliographie) dont voici les détails.

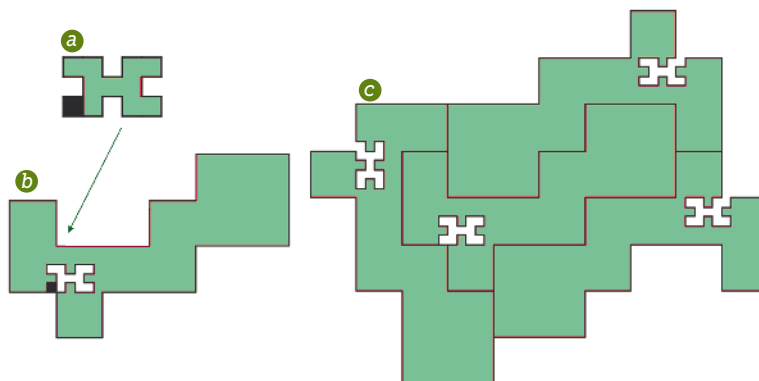
Considérons un polyomino sans trou quelconque, par exemple celui dessiné en a.

Repérons son carré le plus à gauche et le plus bas. Il est dessiné en noir.

Prenons maintenant un polyomino ayant la forme dessinée en b, et assez grand pour que, en plaçant le polyomino a avec le carré noir comme indiqué, tout le polyomino a soit dans le polyomino b.

Creusons le polyomino b en lui enlevant le polyomino a placé comme on vient de l'indiquer.

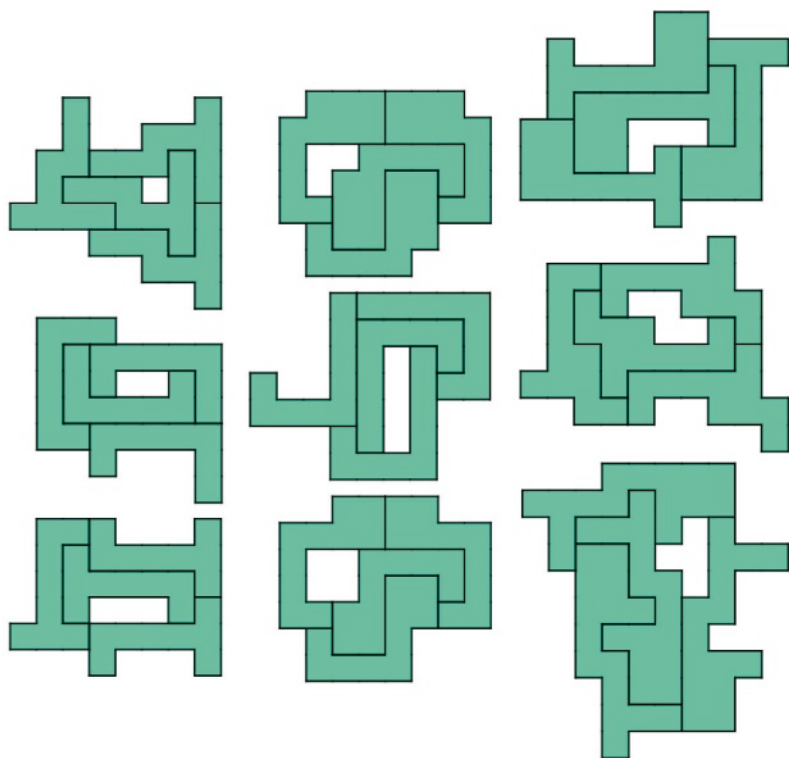
Le polyomino obtenu permet de construire une tétrade (c) avec un trou qui a exactement la forme du polyomino a.



6

DES TROUS, DES PETITS TROUS...

Pour tous les trous possibles de 1 carré, 2 carrés, 3 carrés (2 cas), et 4 carrés (5 cas), voici la tétrade utilisant les polyominoes les plus petits possible et dotés d'un tel trou. C'est un programme de Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis qui a donné ces résultats.



> Précisons que l'on considère que deux polyominoes sont identiques si l'un s'obtient à partir de l'autre par translation, rotation ou symétrie par rapport à une droite (retournement du polyomino). Le décompte des polyominoes est un problème difficile et on ne connaît, grâce à des calculs par ordinateur, le nombre de polyominoes de n carrés que pour n compris entre 1 et 28. Ces nombres sont donnés par la suite <https://oeis.org/A000105> de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane. Le record de calcul, pour 28, a été établi par le chercheur portugais Tomás Oliveira e Silva: il y a 153511100594603 polyominoes composés de 28 carrés. Pour créer et étudier les tétrades faites de polyominoes à n carrés, Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis ont mis au point un algorithme qui fonctionne de la façon suivante.

– La liste complète des polyominoes P à n carrés est engendrée et on envisage chacun séparément.

– Une première copie du polyomino P étudié est déposée sur le plan à un endroit quelconque. Une seconde copie P' de P est ajoutée et placée de toutes les façons possibles où P' touche P au moins par un segment correspondant au côté d'un carré. De même, une troisième copie P'' , puis une quatrième copie P''' sont placées de toutes les façons possibles touchant P .

– On examine si les quatre copies constituent une tétrade: pas de chevauchement des copies de P , et chacune touche les trois autres par au moins un segment.

– Si la configuration P - P' - P'' - P''' est une tétrade, on contrôle qu'elle n'est pas déjà présente dans la liste que le programme construit, ni une configuration s'en déduisant par translation, rotation ou symétrie axiale (retournement de la configuration). Si la configuration est vraiment nouvelle, le programme l'ajoute à la liste qu'il constitue.

Le tableau résultant du calcul est reproduit page 82. Comme on l'a vu pour le cas $n=8$, on observe que le nombre de tétrades obtenues est toujours plus grand que le nombre de polyominoes donnant des tétrades. La raison est simple: certains polyominoes se disposent de plusieurs façons en tétrades.

Le rapport entre le nombre de tétrades et le nombre de polyominoes donnant au moins une tétrade augmente avec n . On pense que ce rapport tend vers l'infini, mais c'est une conjecture. Le calcul pour arriver à traiter complètement le cas $n=17$ a demandé 30 heures à la machine utilisée (un processeur Intel® Core™ i7-3820 à 3,60 GHz).

TÉTRADES SANS TROU

La dernière colonne du tableau indique le nombre de tétrades sans trou et montre que la plus petite est composée de polyominoes de 11 carrés. Elle est représentée sur la figure *a* de l'encadré 3.

La première série (*a*, *b*, *c*) de dessins de l'encadré 3 se poursuit à l'infini et montre donc qu'il existe une infinité de tétrades sans trou à base de polyominoes.

La seconde série (*d*, *e*) montre de même qu'il existe une infinité de tétrades sans trou à base de polyominoes ne nécessitant pas de retourner un polyomino pour composer les tétrades.

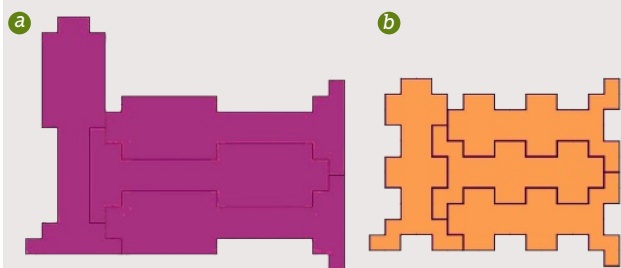
L'encadré 4 montre que pour tout entier n à partir de 17, il existe une tétrade sans trou à base de polyominoes faits de n carrés. Pour les entiers compris entre 11 et 17, on prouve aussi, en traitant chaque cas, que de telles tétrades existent.

On remarquera que les trois derniers énoncés sont des affirmations que l'on a découvertes grâce à l'ordinateur, mais qu'une fois connues, on est en mesure, et c'est

7

POLYOMINOS À AXE DE SYMÉTRIE

Ci-dessous, les polyominos les plus petits connus ayant un axe de symétrie et permettant de construire une tétrade sans trou. La configuration *a*, due à Juris Čerņenoks, utilise un polyomino de 48 carrés ; la seconde, *b*, trouvée à la fois par Frank Rubin et par Karl Scherer, utilise un polyomino de 34 carrés. On ignore si l'on peut faire mieux.



immédiat en considérant les dessins, de les prouver sans son aide, contrairement aux énoncés sur les décomptes qui restent toujours liés à la confiance accordée aux programmes écrits et à leur fonctionnement.

L'énoncé suivant est très joli et, là encore, sa démonstration astucieuse se fait sans ordinateur. Il concerne les trous dans les tétrades à base de polyominos. On peut souhaiter qu'il n'y ait pas de trou comme précédemment, mais on peut aussi se demander s'il est possible de faire un trou d'une forme donnée à l'avance. Bien sûr, un trou dans une tétrade faite de polyominos a nécessairement la forme d'un polyomino lui-même sans trou. Le très beau résultat de Juris Čerņenoks et Andrejs Cibulis est : « Tout polyomino sans trou est la forme d'un trou pour une tétrade faite de polyominos » (voir l'encadré 5 pour la démonstration).

TROUS SIMPLES

Toujours à propos des trous d'une tétrade formée de polyominos, on peut considérer les trous les plus simples possible et rechercher pour chacun le polyomino le plus petit possible permettant la construction d'une tétrade ayant ce trou. Pour tous les trous de 1, 2, 3 et 4 carrés, l'encadré 6 donne la réponse, trouvée par ordinateur.

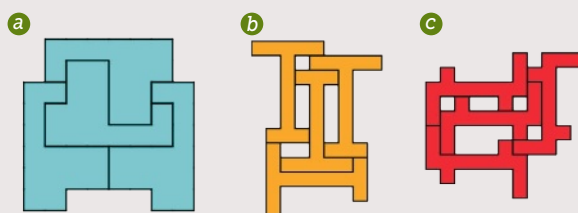
Comme tout bon sujet de mathématiques, celui des tétrades a ses énigmes non résolues. En voici trois d'une difficulté raisonnable que nous invitons les lecteurs à attaquer.

8

AXE ET CENTRE DE SYMÉTRIE

Le dessin *a* montre une tétrade ayant un axe de symétrie. Le dessin *b* est une tétrade formée avec le plus petit polyomino possible ayant un axe de symétrie. Le dessin *c* est construit à partir du plus petit polyomino donnant une tétrade et ayant un centre de symétrie.

D'autres tétrades intéressantes formées avec des polyominos sont proposées sur la page web de George Sicherman : <https://userpages.monmouth.com/~colonel/tetrads/ntetrads.html>



Énigme 1. Quel est le plus petit polyomino ayant un axe de symétrie et permettant la construction d'une tétrade sans trou ? Deux solutions sont connues, sans que l'on sache si on peut faire mieux. La première est due à Juris Čerņenoks et utilise un polyomino de 48 carrés. La seconde, trouvée indépendamment par Frank Rubin et Karl Scherer, utilise un polyomino de 34 carrés. Il faut soit prouver que ce record actuel est indépassable, soit l'améliorer (voir l'encadré 7).

Énigme 2. Existe-t-il des polyominos ayant un axe de symétrie et donnant une tétrade sans trou qui a elle-même un axe de symétrie ?

Énigme 3. Existe-t-il des polyominos ayant un centre de symétrie et donnant une tétrade sans trou ?

Avant d'attaquer les énigmes 2 et 3, notez bien les tétrades déjà connues et présentant des symétries. Le dessin *a* de l'encadré 8 montre une tétrade ayant un axe de symétrie, mais le polyomino qui l'engendre n'en a pas. Le dessin *b* montre le plus petit polyomino ayant un axe de symétrie et pouvant engendrer une tétrade, mais celle-ci a des trous. Le dessin *c* montre le plus petit polyomino doté d'un centre de symétrie, mais la tétrade a des trous.

L'objectif d'améliorer les résultats du tableau donné plus haut, pour aller au-delà de 17, semble accessible. Si vous y parvenez ou si vous résolvez l'une des trois énigmes, prévenez-moi, vos résultats seront publiés dans une prochaine rubrique. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Čerņenoks et A. Cibulis, **Tetrads and their counting**, *Baltic J. Modern Computing*, vol. 6(2), pp. 96-106, 2018 (<https://doi.org/10.22364/bjmc.2018.6.2.01>).

J. Čerņenoks et A. Cibulis, **Application of IT in mathematical proofs and in checking of results of pupils' research**, *Proc. of the 6th Intern. Conf. on Applied Inform. and Comm. Technologies*, Jelgava, Latvia, pp. 172-177, 2013 (http://alephfiles.rtu.lv/TUA01/000040029_e.pdf).

A. Cibulis et J. Čerņenoks, **Tetrads – it is not so easy**, *MCG Newsletter*, n° 3, pp. 23-28, 2012 (www.brgkepler.at/~geretschlaeg/MCG_Newsletter_3.pdf).

M. Gardner, **Penrose tiles to trapdoor ciphers**, chap. 9, *The Mathematical Association of America*, 1997.

Pages web de G. Sicherman : www.recmath.org/PolyCur/tetrads/tetrads.html, <https://userpages.monmouth.com/~colonel/>

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

LA PIERRE IDÉALE DU FACTEUR CHEVAL



Une pierre particulière fut le déclencheur de la construction du chef-d'œuvre de l'art naïf le Palais idéal du facteur Cheval. Qu'a-t-elle de si étonnant?

A

vril 1879, dans la Drôme, à deux pas du Vercors, un facteur effectue sa longue et harassante tournée à pied sur des chemins escarpés autour d'Hauterives. Près

de Tersanne, petite commune de quelques centaines d'habitants, l'employé des Postes trébuche et tombe à terre.

Son pied vient de heurter une pierre. Il notera plus tard : « Elle représente une sculpture aussi bizarre qu'il est impossible à l'homme de l'imiter. » La pierre scellera le destin de l'homme, car elle fera de lui, Ferdinand Cheval, un architecte et un maçon qui passera 33 ans de sa vie à bâtir à la chaux, au mortier et au ciment un monument hors normes, mélange détonnant d'inspirations biblique, hindoue, égyptienne... nourries par les premières cartes postales que le préposé distribuait. Chef-d'œuvre de

l'art naïf, le « Palais idéal du facteur Cheval », de 12 mètres de hauteur et 26 de longueur, fut admiré par Pablo Picasso, mais aussi André Breton, Jean Tinguely, Max Ernst, Robert Doisneau...

Attardons-nous sur celle par qui tout a commencé, la pierre dite « d'achoppement » par Ferdinand Cheval. Elle ressemble à une série de piles d'assiettes, dont les couleurs s'étirent du gris à l'ocre. De quel minéral s'agit-il et quels processus géologiques ont pu présider à une telle formation ?

Selon Didier Nectoux, directeur du musée de l'École des mines, à Paris, ce serait un grès. Il témoigne de dépôts sableux successifs dans une dynamique régulière et assez tranquille. Cet empilement a ensuite été enfoui et a subi une diagenèse, c'est-à-dire un ensemble de processus physicochimiques par lesquels il se transforme en une roche. Plus