

À LA CITÉ DES SCIENCES ET DE L'INDUSTRIE

27 février

La banquise : le robot et le manchot

Yvon Le Maho, directeur de recherche à l'Institut pluridisciplinaire Hubert Curien, CNRS / université de Strasbourg et Centre scientifique de Monaco.

5 mars

La Lune : les robots et le nouveau continent

Bernard Foing, directeur groupe international lunaire ILEWG, Esa / Estec, responsable SMART-1, première mission lunaire européenne, professeur à VU, Amsterdam.

12 mars

Le désert : le robot inspiré d'une fourmi

Stéphane Viollet, directeur de recherche au CNRS, Institut des sciences du mouvement, Marseille.

AVEC LE SOUTIEN DE **SCIENCE**



magnétisme : large champ de recherches

cycle de conférences

les samedis à 16h

© I23RF

des robots en milieux extrêmes

cycle de conférences

— les jeudis à 19h



AU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

29 février

Champ magnétique, champ de Higgs... qu'est-ce qu'un champ ?

Gilles Cohen Tannoudji, physicien théoricien en physique des particules, conseiller scientifique, Larsim.

7 mars

Champs magnétiques : architectes de l'Univers ?

Patrick Hennebelle, chercheur au CEA, Saclay.

14 mars

Des bactéries qui ne perdent pas le nord

David Pignol, directeur de recherche à l'Institut biosciences et biotechnologies d'Aix-Marseille.

21 mars

Stockage des données : l'ère de la spintronique

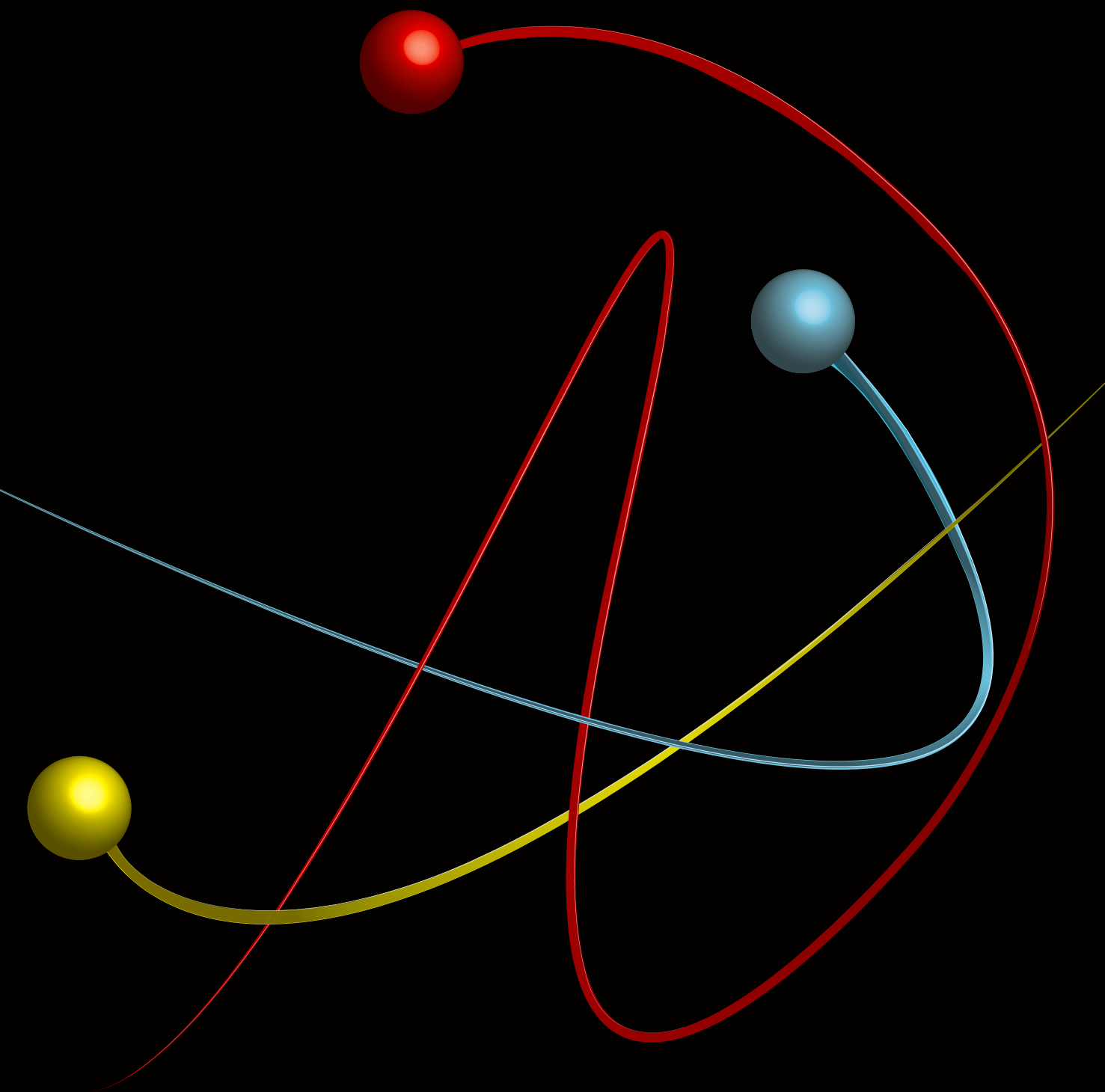
Hélène Fischer, enseignante chercheuse à l'Institut Jean-Lamour, CNRS, université de Lorraine.

28 mars

Stocker plus, plus vite et plus sobre

Stéphane Mangin, enseignant chercheur à l'Institut Jean-Lamour, CNRS, université de Lorraine.

AVEC LE SOUTIEN DE **SCIENCE**



L'ESSENTIEL

> Le « problème des trois corps » consiste à décrire la trajectoire de trois masses soumises seulement à leur attraction gravitationnelle mutuelle, leurs positions et vitesses initiales étant données.

> Au cours des deux derniers siècles, les mathématiciens ont montré que le problème des trois corps est quasiment

« insoluble » : il est généralement impossible de décrire la trajectoire des corps par une formule.

> Le problème continue cependant d'inspirer les chercheurs, qui découvrent par exemple des solutions intéressantes dans des configurations particulières.

L'AUTEUR



RICHARD MONTGOMERY
professeur
de mathématiques
à l'université de Californie
à Santa Cruz, aux États-Unis

Le problème des trois corps rebondit

Déterminer les trajectoires de trois corps soumis uniquement à leur interaction gravitationnelle est un problème célèbre posé depuis plus de deux siècles. Les mathématiciens savent aujourd'hui qu'ils ne pourront jamais le « résoudre » complètement. Cependant, l'étude de cas particuliers a, encore récemment, donné lieu à des découvertes intrigantes.

Au printemps 2014, j'avais baissé les bras face au problème des trois corps. À court d'idées, j'avais commencé à programmer sur mon ordinateur portable pour calculer des solutions approchées et les étudier. Ces tentatives ne répondraient jamais à la question mathématique précise que je m'étais posée, mais elles me fourniraient des indices pour avancer. Cependant, mon incompetence en programmation rendait cette expérience pénible pour un mathématicien comme moi, attaché à son papier et son crayon. J'ai alors fait appel à mon vieil ami Carles Simó, professeur à l'université de Barcelone, pour m'aider dans ma quête malsadroite. Je ne me doutais pas qu'il m'ouvrirait un horizon totalement nouveau en mathématiques fondamentales.

Cet automne-là, je me suis donc rendu en Espagne pour rencontrer mon collègue,

reconnu comme l'un des spécialistes les plus imaginatifs et rigoureux de l'analyse numérique en mécanique céleste. C'est aussi un homme direct qui ne tergiverse pas. Pendant mon premier après-midi dans son bureau, il m'a regardé de ses yeux perçants et m'a demandé : « Pourquoi cette question si abstraite t'intéresse-t-elle, au fond ? » Mon sang n'a fait qu'un tour. Cela faisait près de vingt ans que toute mon activité de recherche y était consacrée ! Si ma question me semblait importante, c'est parce qu'elle est liée à la fois à un problème vieux de plusieurs siècles et à deux domaines majeurs des mathématiques modernes : la topologie et la géométrie riemannienne.

Les origines du problème des trois corps remontent à 1687, lorsqu'Isaac Newton a, le premier, posé et résolu le problème des deux corps dans ses *Principia Mathematica*. Il s'était demandé : « Comment deux masses se déplaceront-elles dans l'espace si elles ne sont >

> soumises qu'à leur attraction gravitationnelle mutuelle?» Newton a reformulé cette question en un problème de résolution d'un système d'équations différentielles, des équations qui déterminent le mouvement futur d'un objet à partir de sa position et de sa vitesse actuelles. Il a complètement résolu ces équations pour deux corps. Dans les solutions, ou «orbites» (des trajectoires vérifiant ces équations différentielles), chaque objet décrit une conique – c'est-à-dire un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

En identifiant toutes les orbites possibles, Newton a retrouvé et même affiné les «lois de Kepler», des lois empiriques régissant les mouvements des astres, publiées par l'astronome allemand Johannes Kepler en 1609, et qui synthétisaient des décennies d'observations astronomiques de son employeur, Tycho Brahe.

La première loi de Kepler, ou «loi des orbites», stipule que, dans le Système solaire, chaque planète – ou comète – se déplace selon une conique, dont l'un des foyers est le Soleil. Dans les solutions de Newton, cependant, les deux corps – le Soleil et une planète – se déplacent selon deux coniques distinctes. Ces deux coniques ont un foyer en commun: le centre de masse des deux objets. Le Soleil étant bien plus massif que les planètes du Système solaire, le centre de masse d'un système Soleil-planète est contenu dans l'étoile, très près de son centre de masse à elle, et cette dernière oscille à peine autour du centre de masse commun, suivant une petite ellipse.

Si l'on considère trois masses interagissant par la force de gravitation newtonienne au lieu de deux, le problème devient celui des trois corps. Là encore, les orbites sont les solutions d'un système d'équations différentielles. En revanche, il est difficile, voire impossible, d'exhiber des formules explicites pour ces orbites. À ce jour, malgré l'aide des ordinateurs modernes et plusieurs siècles de travail acharné de physiciens et mathématiciens parmi les plus talentueux, on n'a de formules explicites que pour cinq familles d'orbites: trois découvertes par le mathématicien suisse Leonhard Euler en 1767, et deux par son confrère français (d'origine italienne) Joseph-Louis Lagrange en 1772.

Et pour cause: en 1890, le mathématicien et physicien français Henri Poincaré a mis en évidence des phénomènes chaotiques dans le problème des trois corps. Les solutions des équations du mouvement sont si sensibles aux

DEUX EXEMPLES D'ORBITES À 2 CORPS

Soleil beaucoup plus massif qu'une planète: l'orbite elliptique du Soleil est très petite.



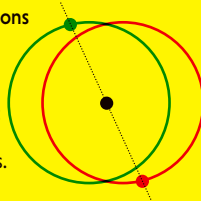
Deux masses égales en orbite elliptique



DEUX EXEMPLES D'ORBITES À 3 CORPS

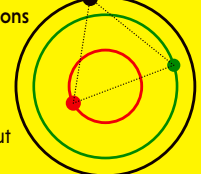
L'une des solutions d'Euler

Trois masses égales dont l'une au centre: les corps sont toujours alignés.



L'une des solutions de Lagrange

Les corps forment un triangle équilatéral à tout instant.

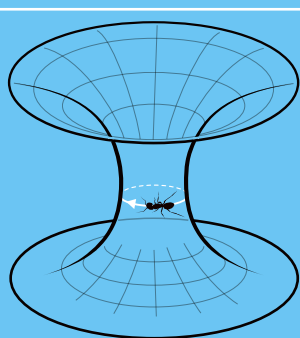


ÉCLIPSES



Noté «éclipse de type 2» (corps 2 au centre)

CATÉNOÏDE



conditions initiales qu'on ne les connaît jamais toutes exactement, ou même seulement avec un degré de précision donné; on est donc très loin de la solution simple, unique et exacte de Newton pour le problème des deux corps.

Cependant, par «intégration numérique», un ensemble de techniques d'analyse numérique implémentées avec efficacité sur un ordinateur, on peut tout de même calculer de façon approchée des portions de trajectoire de durée finie, ce qui est d'ailleurs essentiel dans la planification des missions spatiales. En allongeant le temps de calcul alloué à l'ordinateur, il est possible de rendre ces approximations aussi fidèles que voulu, sous réserve de connaître parfaitement les conditions initiales.

UNE QUESTION SUR LES SUITES D'ÉCLIPSES

C'était donc pour obtenir de l'aide dans ce domaine prometteur que je consultais mon collègue Carles Simó. Sa question m'avait interloqué. Je travaillais en effet depuis plusieurs décennies sur un point bien précis en lien avec le problème des trois corps:

«Toute suite d'éclipses périodique est-elle la suite associée à une certaine solution périodique du problème des trois corps planaire?»

Je m'explique. Imaginez trois corps – des étoiles ou des planètes, par exemple – se déplaçant dans un même plan et exerçant les uns sur les autres une attraction gravitationnelle. Par la suite, on se placera toujours dans ce cas particulier, dit «planaire». Numérotez les objets 1, 2 et 3. Leurs masses sont pour l'instant quelconques. Comme les trois objets se déplacent dans un même plan, ils seront de temps en temps alignés. Ces instants ne sont rien d'autre que des éclipses (techniquement, ils sont nommés «syzygies», un mot idéal pour gagner au jeu du pendu). À mesure que le temps s'écoule, enregistrez chaque éclipse qui se produit, en lui donnant le numéro 1, 2 ou 3 selon le numéro de l'astre qui se trouve entre les deux autres. De cette façon, on obtient une suite de 1, 2 et 3, la «suite d'éclipses».

Par exemple, dans une version simplifiée de notre système Soleil-Terre-Lune, la Lune, numérotée 3, tourne autour de la Terre (corps numéroté 2) en un mois (considéré ici comme valant un douzième d'année) tandis que la Terre met un an à faire une révolution autour du Soleil, numéroté 1. Ce mouvement se répète, et

donne donc lieu à une suite d'éclipses périodique : 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 3. Cette suite ne contient pas de 1, puisque le Soleil ne se trouve jamais entre la Terre et la Lune. Pour une durée de un an, la suite contient donc 24 nombres, avec un groupe «2, 3 » pour chacun des 12 mois de l'année.

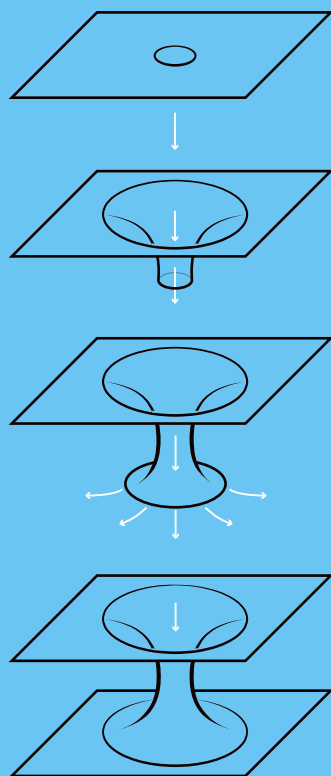
Dans le cas général, puisqu'il s'agit de systèmes chaotiques, il n'y a aucune raison pour que la suite d'éclipses d'une solution du problème des trois corps soit périodique: elle peut très bien se dérouler éternellement sans exhiber de motif discernable. Cependant, si la solution se répète à l'identique après un certain intervalle de temps, comme dans le système Soleil-Terre-Lune simplifié, alors la suite d'éclipses sera aussi périodique. D'où la question que je m'étais posée: toute suite d'éclipses périodique est-elle la suite associée à une certaine solution périodique du problème des trois corps planaire? Je soupçonnais que la réponse est «oui», mais je n'arrivais pas à le prouver.

DES OBJETS AVEC DES TROUS

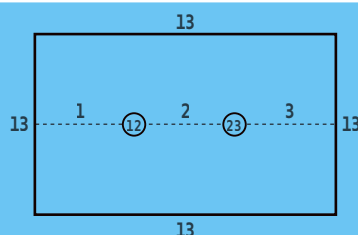
Carles Simó, pour sa part, était davantage versé dans l'aspect pratique du calcul numérique d'orbites pour les missions spatiales que dans des questions abstraites à propos de suites d'éclipses; il n'avait donc pas vu l'intérêt de ma question. Pourtant, j'avais l'intuition que, pour y répondre, je pourrais utiliser une approche qu'il connaissait bien, associant trois domaines des mathématiques: la topologie (domaine où l'on étudie les propriétés d'objets que l'on a le droit de déformer, mais pas de déchirer ou trouer), la géométrie riemannienne (qui étudie entre autres les surfaces courbes), et les systèmes dynamiques, relatifs à l'évolution temporelle des systèmes et aux mouvements des objets.

Pourquoi cette intuition? Parce que ces domaines étaient déjà reliés par d'autres résultats bien connus, dont certains présentent des similarités avec le problème des trois corps. Imaginez une fourmi qui marche sur la surface que les mathématiciens nomment «caténoïde». L'objectif de la fourmi est de trouver le chemin le plus court pour tourner une fois autour du trou. Du point de vue de la topologie, la caténoïde est identique à un plan (avec deux coordonnées réelles, x et y) «épointé», c'est-à-dire auquel on a retiré un seul point. En effet, retirez un point d'une feuille souple et déformable en caoutchouc. En poussant le bord du

DÉFORMATIONS EN TOPOLOGIE



ESPACE DE CONFIGURATION SANS COLLISION



trou vers le bas et en l'étirant vers l'extérieur, vous déformerez le plan en une caténoïde. Il a été démontré que, si le trou a été suffisamment élargi, non seulement il existe un chemin de longueur minimale, mais celui-ci satisfait une équation différentielle très similaire à celle du problème des trois corps. Ainsi, notre fourmi a trouvé une solution périodique à une équation différentielle intéressante.

Dans le problème des trois corps, le rôle de la caténoïde est assumé par ce qu'on nomme l'«espace de configuration», un espace dont chaque point encode simultanément la position des trois astres, de sorte qu'une courbe dans l'espace de configuration décrit le mouvement des trois corps. Veiller à ce que les corps n'entrent pas en collision revient ici à faire des trous – retirer des points – dans cet espace de configuration. Comme on le verra, d'un point de vue topologique, l'«espace de configuration sans collision» qui en résulte est identique au plan x - y auquel on a retiré deux points. On note «12» le trou représentant la collision des corps 1 et 2, et «23» celui représentant la collision des corps 2 et 3, et on place ces trous sur l'axe des abscisses (l'axe des x). On place aussi un troisième trou «à l'infini» (un point abstrait, situé infiniment loin de l'origine dans toutes les directions) pour représenter la collision des corps 1 et 3.

Ces trous divisent l'axe des abscisses en trois morceaux, notés 1, 2 et 3 (ces choix sont arbitraires et les rôles des corps 1, 2 et 3 peuvent bien sûr être intervertis). Une courbe dans ce plan x - y doublement épointé représente une trajectoire sans collision des trois corps, et donc une solution potentielle du problème des trois corps; potentielle seulement, car rien ne garantit pour l'instant que cette trajectoire satisfasse aux lois de la mécanique newtonienne. Quand la courbe coupe l'intervalle 1, cela signifie qu'une éclipse de type 1 se produit (le corps 1 est entre les deux autres), et de même pour les intervalles 2 et 3. De cette façon, une suite d'éclipses représente une manière d'enrouler la courbe autour des trous représentant les collisions.

Notre fourmi voulait minimiser la longueur de son chemin autour du trou sur la caténoïde. Pour compléter l'analogie entre le problème de la fourmi et le problème des trois corps, il faut remplacer la grandeur «longueur du chemin» par une quantité nommée «action» du chemin. On peut définir l'action comme ➤

> une sorte de moyenne temporelle de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, lorsqu'il suit une trajectoire donnée. Mais ce qui nous intéresse ici est d'utiliser cette grandeur pour identifier les trajectoires physiquement acceptables.

Un théorème de mécanique plus que centenaire, le « principe de moindre action », implique en effet que toute courbe dans notre espace de configuration pour laquelle la valeur de l'action est minimale représente une solution au problème des trois corps de Newton. Une piste pour résoudre mon problème d'éclipses consistait donc à rechercher, parmi tous les chemins fermés et sans collision donnant une suite d'éclipses donnée, lesquels avaient une action minimale.

Pendant dix-sept ans, je m'étais intéressé de près à cette stratégie – chercher à minimiser l'action de boucles ayant une suite d'éclipses donnée dans un espace de configuration –, stratégie qui avait offert de jolis résultats. Par exemple, en 2000, Alain Chenciner, de l'université Paris-Diderot, et moi-même avions redécouvert de cette manière ce qui semble être la première solution périodique connue du problème des trois corps avec un moment cinétique nul (le moment cinétique est une mesure de la quantité totale de « rotation » d'un système massif; elle est constante dans le temps pour une orbite donnée; les solutions d'Euler et de Lagrange correspondent toutes à un moment cinétique non nul).

Notre solution était une orbite en forme de 8, découverte originellement en 1993 par Cris Moore, de l'Institut de Santa Fe. Dans cette configuration, trois astres de même masse se déplacent le long d'un 8, dans un plan. La suite d'éclipses associée est 123123..., la séquence 123 se répétant à l'infini. Notre travail a popularisé la figure en 8 et fourni une preuve rigoureuse de l'existence de cette solution. Il a aussi entraîné la découverte successive, tout au long des années 2000, de nombreuses solutions nouvelles du problème de N corps de masses égales, des orbites nommées « chorégraphies » par Carlos Simó, lequel a lui-même découvert des centaines de familles de ce type. L'orbite en forme de 8 apparaît même dans un fameux roman de science-fiction de Liu Cixin, publié en 2008, dont le titre a été traduit en *Le Problème à trois corps*.

Le lendemain matin du jour où j'avais fait part de mes réflexions à Carlos Simó, il m'a dit quelque chose qui m'a

profondément marqué: « Richard, j'ai réfléchi à ton problème. Si ce que tu conjectures à propos de ta question est vrai, alors il doit y avoir un mécanisme dynamique sous-jacent. » En d'autres termes, si j'avais raison de penser que la réponse à ma question était « oui », alors cela devait s'expliquer de manière concrète par la façon dont les corps se meuvent, et le mode de recherche plus abstrait que j'avais adopté en travaillant sur l'action n'était pas la démarche adaptée.

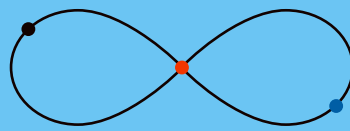
Ces quelques mots m'ont fait douter de mes convictions et m'ont poussé à mettre un terme à dix-sept ans de tentatives de répondre à ma question en minimisant l'action. Quels mécanismes dynamiques comprenais-je vraiment dans ce problème? J'en ai compté deux, dont un seulement me donnait l'espoir d'avancer. Ce mécanisme est lié au chaos découvert par Poincaré et dû à l'extrême sensibilité des solutions aux conditions initiales. Il est relatif au comportement complexe des solutions lorsqu'elles s'approchent – sans l'atteindre – d'une « collision triple » (une collision simultanée des trois corps) dans le problème des trois corps. Cela m'a amené à réfléchir sur d'anciens travaux d'un de mes collègues récents, Rick Moeckel, de l'université du Minnesota.

Dans les années 1980, ce chercheur avait exploré ce mécanisme et montré que l'étude du comportement des solutions au voisinage des collisions triples donnait des résultats intéressants. En relisant ses vieux articles, il m'est apparu que Rick Moeckel avait peut-être la clé de mon problème. J'ai pris contact avec lui et, en quelques jours, nous avons répondu à ma question! Enfin, presque. Nous avons répondu à une question infiniment proche.

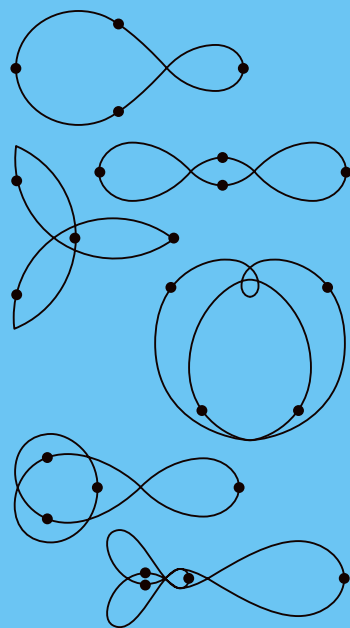
LA « SPHÈRE DES FORMES », UN CONDENSÉ DES MOUVEMENTS POSSIBLES

Pour comprendre le mécanisme dynamique que Rick Moeckel avait étudié et pourquoi l'espace de configuration du problème des trois corps équivaut au plan $x-y$ doublement époincé, comme je l'ai dit plus haut, il est nécessaire d'introduire un objet mathématique nommé la « sphère des formes ». Lorsque les trois corps sont en mouvement dans un plan, ils forment à chaque instant les sommets d'un triangle. Au lieu d'enregistrer la position de chacun des sommets, ne gardons trace, au fil du temps, que de la

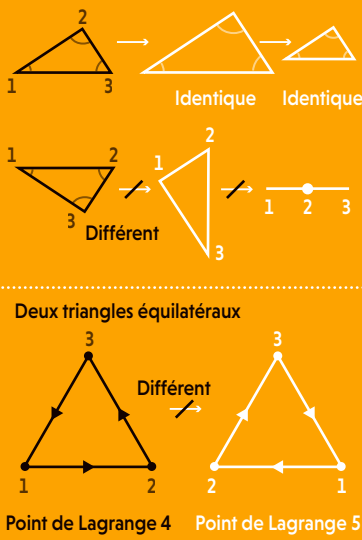
SOLUTION EN FORME DE 8



NOUVELLES ORBITES (À 4 CORPS)



FORMES



forme globale du triangle qu'ils dessinent. On obtient une courbe sur la sphère des formes, une sphère où chaque point représente une «forme» de triangle.

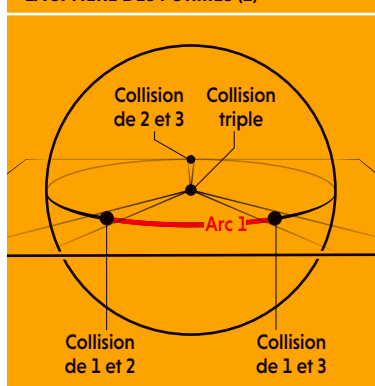
Qu'est-ce qu'une «forme»? Deux figures dans le plan ont la même forme si l'on peut passer de l'une à l'autre par translation, rotation ou dilatation. L'opération consistant à passer d'une configuration possible du problème des trois corps – c'est-à-dire la connaissance de la position des trois sommets du triangle – à un point de la sphère des formes est un processus qui «oublie» la taille du triangle, la position de son centre de gravité et l'orientation du triangle dans le plan.

Il est facile de comprendre pourquoi l'espace décrivant les formes est de dimension 2 grâce à des faits géométriques élémentaires. La forme d'un triangle, définie comme ci-dessus, est entièrement déterminée par la connaissance de ses trois angles; mais, comme la somme des mesures des trois angles fait toujours 180 degrés, on n'a en fait besoin que des deux premiers angles parmi les trois. Deux nombres suffisent donc pour caractériser la forme d'un triangle. Le fait que cet espace des formes soit une sphère est plus difficile à comprendre, et nous ne le justifierons pas ici.

Comment décrit-on l'ensemble des formes de triangles sur une telle sphère? Cela requiert que l'on permette aux triangles d'être «dégénérés», c'est-à-dire d'avoir leurs trois «sommets» alignés. En prenant en compte tous les rapports de distances possibles entre les trois «sommets», on dessine exactement l'équateur de la sphère des formes. Ces triangles dégénérés, qui sont d'aire nulle, représentent les éclipses. Parmi eux figurent notamment les collisions de deux corps, ou «collisions binaires»: en effet, un triangle dont deux sommets sont confondus est automatiquement dégénéré. La sphère des formes compte ainsi exactement trois triangles de collision binaire, notés 12, 13 et 23 selon les sommets confondus.

On retrouve les triangles non dégénérés sur le reste de la sphère des formes, en dehors de l'équateur. Chacun de ces triangles correspond à un point de la sphère, à une certaine distance de l'équateur le long de la sphère. Cette distance est elle-même donnée par le rapport A/r^2 où A est l'aire du triangle et r sa taille (ce rapport est donc une aire normalisée de façon que des triangles de tailles différentes soient comparables). Ici, la «taille» d'un triangle est une mesure géométrique

LA SPHÈRE DES FORMES (1)



unidimensionnelle de sa grandeur, contrairement à l'aire. Ainsi, aucun des triangles représentés par la sphère des formes n'est de taille nulle, car aucun n'est réduit à un point. Les pôles nord et sud de la sphère, situés à distance maximale de l'équateur, représentent donc les triangles d'aire maximale (pour une taille donnée) et sont par conséquent équilatéraux.

Mais pourquoi y en a-t-il deux? Parce que l'ordre de leurs sommets diffère. Il n'y a aucun moyen de passer de l'un de ces triangles équilatéraux à l'autre par translation, rotation et dilatation: ils représentent véritablement des formes différentes. En revanche, une réflexion (une symétrie miroir par rapport à n'importe quel plan dans l'espace) fait passer d'un triangle à l'autre. Cette opération de réflexion agit sur tous les triangles – et donc sur les points de la sphère des formes – par symétrie par rapport à l'équateur, en laissant fixes les points de l'équateur (qui représentent les triangles dégénérés) et en échangeant les hémisphères nord et sud.



Pendant dix-sept ans, j'ai cherché à minimiser l'«action» de boucles à suite d'éclipses donnée



Je peux maintenant vous expliquer comment la sphère des formes montre que l'ensemble des configurations du problème des trois corps est bien topologiquement identique au plan $x-y$ doublement époincé. Pour cela, il nous faut montrer qu'une sphère privée d'un point est assimilable au plan $x-y$ classique. Une manière de le comprendre est d'utiliser la projection stéréographique, qui projette une sphère privée d'un seul point (qui fait office de «source de lumière») sur le plan $x-y$ usuel. Chaque point de la sphère époincée est projeté sur le plan $x-y$ par la droite qui relie ce point à la source de lumière. Si l'on considère des points de la sphère de plus en plus proches de la source de lumière, leur point image par la projection stéréographique sur le plan s'échappe à l'infini; on >

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

