

> une sorte de moyenne temporelle de la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, lorsqu'il suit une trajectoire donnée. Mais ce qui nous intéresse ici est d'utiliser cette grandeur pour identifier les trajectoires physiquement acceptables.

Un théorème de mécanique plus que centenaire, le « principe de moindre action », implique en effet que toute courbe dans notre espace de configuration pour laquelle la valeur de l'action est minimale représente une solution au problème des trois corps de Newton. Une piste pour résoudre mon problème d'éclipses consistait donc à rechercher, parmi tous les chemins fermés et sans collision donnant une suite d'éclipses donnée, lesquels avaient une action minimale.

Pendant dix-sept ans, je m'étais intéressé de près à cette stratégie – chercher à minimiser l'action de boucles ayant une suite d'éclipses donnée dans un espace de configuration –, stratégie qui avait offert de jolis résultats. Par exemple, en 2000, Alain Chenciner, de l'université Paris-Diderot, et moi-même avions redécouvert de cette manière ce qui semble être la première solution périodique connue du problème des trois corps avec un moment cinétique nul (le moment cinétique est une mesure de la quantité totale de « rotation » d'un système massif; elle est constante dans le temps pour une orbite donnée; les solutions d'Euler et de Lagrange correspondent toutes à un moment cinétique non nul).

Notre solution était une orbite en forme de 8, découverte originellement en 1993 par Cris Moore, de l'Institut de Santa Fe. Dans cette configuration, trois astres de même masse se déplacent le long d'un 8, dans un plan. La suite d'éclipses associée est 123123..., la séquence 123 se répétant à l'infini. Notre travail a popularisé la figure en 8 et fourni une preuve rigoureuse de l'existence de cette solution. Il a aussi entraîné la découverte successive, tout au long des années 2000, de nombreuses solutions nouvelles du problème de N corps de masses égales, des orbites nommées « chorégraphies » par Carlos Simó, lequel a lui-même découvert des centaines de familles de ce type. L'orbite en forme de 8 apparaît même dans un fameux roman de science-fiction de Liu Cixin, publié en 2008, dont le titre a été traduit en *Le Problème à trois corps*.

Le lendemain matin du jour où j'avais fait part de mes réflexions à Carlos Simó, il m'a dit quelque chose qui m'a

profondément marqué: « Richard, j'ai réfléchi à ton problème. Si ce que tu conjectures à propos de ta question est vrai, alors il doit y avoir un mécanisme dynamique sous-jacent. » En d'autres termes, si j'avais raison de penser que la réponse à ma question était « oui », alors cela devait s'expliquer de manière concrète par la façon dont les corps se meuvent, et le mode de recherche plus abstrait que j'avais adopté en travaillant sur l'action n'était pas la démarche adaptée.

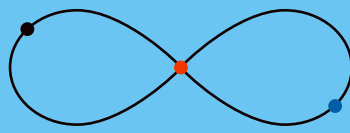
Ces quelques mots m'ont fait douter de mes convictions et m'ont poussé à mettre un terme à dix-sept ans de tentatives de répondre à ma question en minimisant l'action. Quels mécanismes dynamiques comprenais-je vraiment dans ce problème? J'en ai compté deux, dont un seulement me donnait l'espoir d'avancer. Ce mécanisme est lié au chaos découvert par Poincaré et dû à l'extrême sensibilité des solutions aux conditions initiales. Il est relatif au comportement complexe des solutions lorsqu'elles s'approchent – sans l'atteindre – d'une « collision triple » (une collision simultanée des trois corps) dans le problème des trois corps. Cela m'a amené à réfléchir sur d'anciens travaux d'un de mes collègues récents, Rick Moeckel, de l'université du Minnesota.

Dans les années 1980, ce chercheur avait exploré ce mécanisme et montré que l'étude du comportement des solutions au voisinage des collisions triples donnait des résultats intéressants. En relisant ses vieux articles, il m'est apparu que Rick Moeckel avait peut-être la clé de mon problème. J'ai pris contact avec lui et, en quelques jours, nous avons répondu à ma question! Enfin, presque. Nous avons répondu à une question infiniment proche.

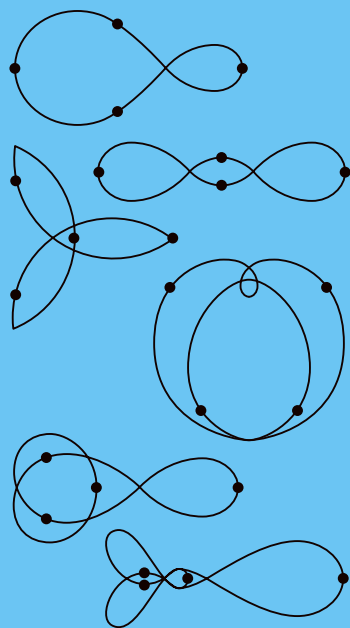
LA « SPHÈRE DES FORMES », UN CONDENSÉ DES MOUVEMENTS POSSIBLES

Pour comprendre le mécanisme dynamique que Rick Moeckel avait étudié et pourquoi l'espace de configuration du problème des trois corps équivaut au plan $x-y$ doublement époincé, comme je l'ai dit plus haut, il est nécessaire d'introduire un objet mathématique nommé la « sphère des formes ». Lorsque les trois corps sont en mouvement dans un plan, ils forment à chaque instant les sommets d'un triangle. Au lieu d'enregistrer la position de chacun des sommets, ne gardons trace, au fil du temps, que de la

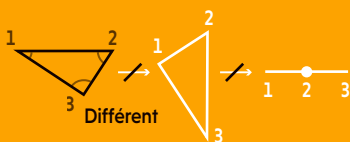
SOLUTION EN FORME DE 8



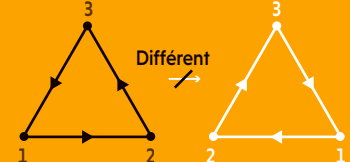
NOUVELLES ORBITES (À 4 CORPS)



FORMES



Deux triangles équilatéraux



Point de Lagrange 4 Point de Lagrange 5

forme globale du triangle qu'ils dessinent. On obtient une courbe sur la sphère des formes, une sphère où chaque point représente une «forme» de triangle.

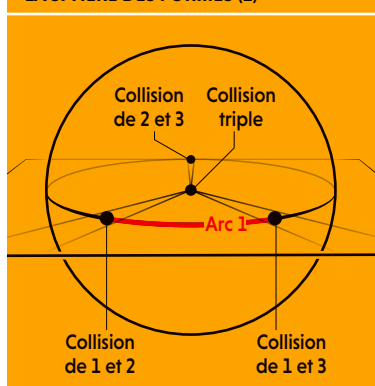
Qu'est-ce qu'une «forme»? Deux figures dans le plan ont la même forme si l'on peut passer de l'une à l'autre par translation, rotation ou dilatation. L'opération consistant à passer d'une configuration possible du problème des trois corps – c'est-à-dire la connaissance de la position des trois sommets du triangle – à un point de la sphère des formes est un processus qui «oublie» la taille du triangle, la position de son centre de gravité et l'orientation du triangle dans le plan.

Il est facile de comprendre pourquoi l'espace décrivant les formes est de dimension 2 grâce à des faits géométriques élémentaires. La forme d'un triangle, définie comme ci-dessus, est entièrement déterminée par la connaissance de ses trois angles; mais, comme la somme des mesures des trois angles fait toujours 180 degrés, on n'a en fait besoin que des deux premiers angles parmi les trois. Deux nombres suffisent donc pour caractériser la forme d'un triangle. Le fait que cet espace des formes soit une sphère est plus difficile à comprendre, et nous ne le justifierons pas ici.

Comment décrit-on l'ensemble des formes de triangles sur une telle sphère? Cela requiert que l'on permette aux triangles d'être «dégénérés», c'est-à-dire d'avoir leurs trois «sommets» alignés. En prenant en compte tous les rapports de distances possibles entre les trois «sommets», on dessine exactement l'équateur de la sphère des formes. Ces triangles dégénérés, qui sont d'aire nulle, représentent les éclipses. Parmi eux figurent notamment les collisions de deux corps, ou «collisions binaires»: en effet, un triangle dont deux sommets sont confondus est automatiquement dégénéré. La sphère des formes compte ainsi exactement trois triangles de collision binaire, notés 12, 13 et 23 selon les sommets confondus.

On retrouve les triangles non dégénérés sur le reste de la sphère des formes, en dehors de l'équateur. Chacun de ces triangles correspond à un point de la sphère, à une certaine distance de l'équateur le long de la sphère. Cette distance est elle-même donnée par le rapport A/r^2 où A est l'aire du triangle et r sa taille (ce rapport est donc une aire normalisée de façon que des triangles de tailles différentes soient comparables). Ici, la «taille» d'un triangle est une mesure géométrique

LA SPHÈRE DES FORMES (1)



unidimensionnelle de sa grandeur, contrairement à l'aire. Ainsi, aucun des triangles représentés par la sphère des formes n'est de taille nulle, car aucun n'est réduit à un point. Les pôles nord et sud de la sphère, situés à distance maximale de l'équateur, représentent donc les triangles d'aire maximale (pour une taille donnée) et sont par conséquent équilatéraux.

Mais pourquoi y en a-t-il deux? Parce que l'ordre de leurs sommets diffère. Il n'y a aucun moyen de passer de l'un de ces triangles équilatéraux à l'autre par translation, rotation et dilatation: ils représentent véritablement des formes différentes. En revanche, une réflexion (une symétrie miroir par rapport à n'importe quel plan dans l'espace) fait passer d'un triangle à l'autre. Cette opération de réflexion agit sur tous les triangles – et donc sur les points de la sphère des formes – par symétrie par rapport à l'équateur, en laissant fixes les points de l'équateur (qui représentent les triangles dégénérés) et en échangeant les hémisphères nord et sud.

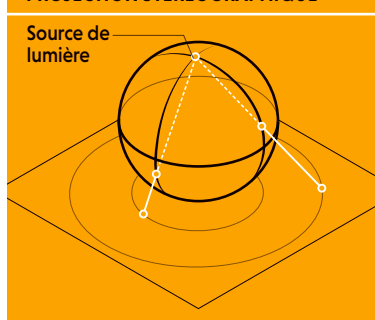


Pendant dix-sept ans, j'ai cherché à minimiser l'«action» de boucles à suite d'éclipses donnée



Je peux maintenant vous expliquer comment la sphère des formes montre que l'ensemble des configurations du problème des trois corps est bien topologiquement identique au plan $x-y$ doublement épointé. Pour cela, il nous faut montrer qu'une sphère privée d'un point est assimilable au plan $x-y$ classique. Une manière de le comprendre est d'utiliser la projection stéréographique, qui projette une sphère privée d'un seul point (qui fait office de «source de lumière») sur le plan $x-y$ usuel. Chaque point de la sphère épointée est projeté sur le plan $x-y$ par la droite qui relie ce point à la source de lumière. Si l'on considère des points de la sphère de plus en plus proches de la source de lumière, leur point image par la projection stéréographique sur le plan s'échappe à l'infini; on >

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

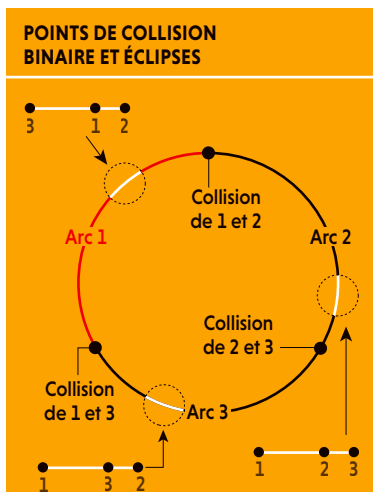
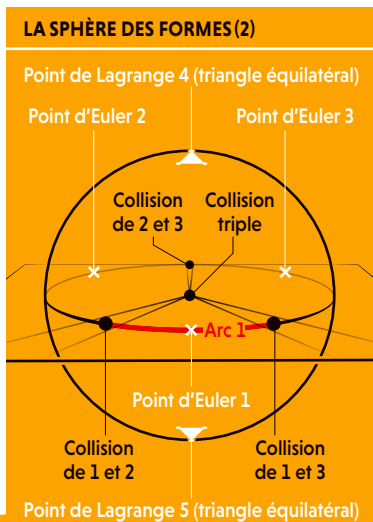


> peut donc aussi dire que le plan x - y auquel on a ajouté un point à l'infini est topologiquement identique à une sphère (source de lumière incluse).

Une question se pose cependant : quel point choisir comme source de lumière ? Une possibilité assez naturelle est de choisir le pôle nord, mais il y a plus judicieux pour notre problème : si l'on prend plutôt comme source de lumière le point de collision 13, en faisant basculer toute la sphère pour que ce point soit au « sommet » de la sphère – à l'emplacement originel de son pôle nord –, le point à l'infini du plan x - y correspond maintenant, par la projection stéréographique, à ce point 13. Et si l'on oriente de plus la sphère pour que son plan équatorial contienne l'axe des x du plan x - y , la projection stéréographique met en correspondance l'équateur de la sphère, contenant les triangles dégénérés, et l'axe des x du plan ; de plus, les deux autres points de collision (12 et 23) sont envoyés sur deux points distincts sur l'axe des x . Il ne reste plus qu'à retirer les deux points de collision sur la sphère en même temps que leur image dans le plan, et l'on obtient l'équivalence recherchée entre l'ensemble des configurations du problème des trois corps et le plan x - y doublement épointé.

Les points de collision binaire sont trois points spéciaux sur la sphère des formes. En dehors de ces trois points, il existe cinq autres points spéciaux sur la sphère des formes, nommés « configurations centrales ». Ces cinq configurations centrales correspondent aux cinq familles de solutions découvertes par Euler et Lagrange, qui sont d'ailleurs les seules solutions pour lesquelles la forme du triangle est constante. Dans les solutions de Lagrange, le triangle est équilatéral à tout instant. Comme on l'a vu, elles sont au nombre de deux ; elles constituent les pôles nord et sud de la sphère des formes et on les nomme « point de Lagrange 4 » et « point de Lagrange 5 ».

Les trois autres configurations spéciales sont les « configurations d'Euler », nommées « point d'Euler 1 », « point d'Euler 2 » et « point d'Euler 3 ». Ce sont des configurations dégénérées où les trois masses sont alignées ; elles sont donc situées sur l'équateur de la sphère des formes. Plus précisément, elles sont disposées entre les trois points de collision ; leur distance aux points de collision sur l'équateur dépend d'ailleurs des rapports de masse entre les trois corps. Le point d'Euler 1, par exemple, est situé sur l'arc



de l'équateur noté 1, comme toute configuration dans laquelle le corps 1 est situé entre les corps 2 et 3. (Souvent, les cinq configurations centrales sont toutes nommées points de Lagrange, celles d'Euler étant notées « L1 », « L2 » et « L3 ». Dans la suite, nous noterons ces cinq configurations « E1 », « E2 », « E3 », « L4 » et « L5 ».)

Une autre manière de comprendre les cinq configurations centrales est d'imaginer ce qui se passe lorsqu'on dispose les trois corps dans l'espace, sans vitesse initiale, et qu'on laisse évoluer le système à partir de ces conditions. Dans le cas général, toutes sortes de choses se produisent alors : des collisions binaires, des ballets déchainés, et, parfois, un corps qui s'échappe à l'infini. Mais lorsqu'on dispose les corps selon l'une des configurations centrales, le triangle qu'ils déterminent garde la même forme à tout instant et rétrécit simplement jusqu'à se réduire à un point, les corps s'attirant les uns les autres jusqu'à ce que la solution se termine en une collision simultanée des trois corps – une collision triple.

Ces cinq configurations centrales correspondent donc à des positionnements des trois corps tels que, si ces derniers sont lâchés sans vitesse, ils entrent en collision triple sans déformation du triangle qu'ils forment. Cependant, s'ils ont des vitesses initiales non nulles bien choisies, on retrouve les orbites décrites par Euler ou Lagrange (d'où le nom des configurations centrales sur la sphère des formes). Avec des vitesses quelconques, en revanche, le comportement du système est chaotique et donne toutes sortes de trajectoires, bien que les positions de départ aient formé un triangle équilatéral.

LES CINQ CHEMINS VERS LA COLLISION TRIPLE

La collision triple est une singularité essentielle du problème des trois corps, tel un « Big Bang » au cœur du problème. Elle est à l'origine d'une grande partie du chaos qu'il contient et de la difficulté à le résoudre. Au début du xx^e siècle, le mathématicien finnois Karl Sundman a démontré que les cinq configurations centrales où les trois corps sont initialement immobiles sont les seuls chemins vers la collision triple. Cela signifie plus généralement que toute solution qui finit en collision triple doit s'approcher de cette collision d'une manière similaire à l'une des configurations centrales : la forme du triangle de la solution doit s'approcher infiniment près de

la forme du triangle de cette configuration centrale. Les configurations centrales sont donc en quelque sorte «universelles», en ce sens qu'elles correspondent aux cinq seules formes possibles d'une solution s'approchant d'une collision triple.

Le travail de Sundman était une prouesse faisant dialoguer de manière complexe l'algèbre et l'analyse. Plus tard, l'année où j'ai terminé mon lycée (je n'avais alors jamais entendu parler du problème des trois corps), le mathématicien américain Richard McGehee a inventé une méthode dite «de l'éclatement», qui permettait de mieux comprendre visuellement le travail de Sundman et d'étudier en détail la dynamique du système près de la collision triple.

La taille du triangle, r , représente aussi la distance d'une configuration à la collision triple. Lorsque r tend vers zéro et que l'on se rapproche de la collision triple, le comportement des équations newtoniennes du mouvement devient pathologique, avec des termes qui tendent vers l'infini. Richard McGehee a trouvé un changement de variables, impliquant l'espace de configuration et la variable de temps, qui diminue la vitesse d'approche vers la collision triple et remplace le point de collision triple, correspondant à $r=0$, par un nouvel ensemble de points, nommé la «variété de collision». Surprise: la variété de collision est essentiellement une copie de la sphère des formes! La méthode de Richard McGehee permet en substance d'étendre les équations du mouvement, au départ valides seulement pour $r>0$, en un système d'équations différentielles qui garde son sens lorsque $r=0$.

Les équations du mouvement n'ont pas de point d'équilibre, ce qui signifie qu'il n'y a pas de configuration dans laquelle les trois corps restent au repos: trois étoiles dans l'espace, qui s'attirent les unes les autres, ne peuvent pas juste rester là où elles sont sans bouger. Mais lorsqu'on étend les équations du mouvement à la variété de collision, des points d'équilibre apparaissent. Il y en a exactement dix: deux pour chacune des cinq configurations centrales de la sphère des formes. L'un des deux éléments de chaque paire représente l'état final d'une configuration centrale «lâchée» avec une vitesse initiale nulle et qui se termine en collision triple.

Pour comprendre ce que représente l'autre élément, il faut imaginer que l'on regarde le film de cette collision triple à

l'envers. Comme les équations newtoniennes du mouvement sont les mêmes lorsque le temps s'écoule à l'envers – on dit qu'elles sont «réversibles» –, il est possible de faire se dérouler une solution en remontant le temps. On obtient ainsi une autre solution. Lorsque l'on renverse de cette façon le déroulement d'une configuration centrale «lâchée» avec une vitesse initiale nulle, qui «implose» en une collision triple, on obtient une solution qui «explose» en partant de cette collision triple, atteignant une taille maximale qui n'est autre que la configuration centrale considérée, l'état initial du «lâcher». L'autre élément de la paire représente donc la configuration initiale de cette solution «explosive» – on parle d'«éjection» –, à l'instant (inexistant dans la réalité physique) où les trois corps sont encore «collés» en un même point.

Ensemble, ces deux solutions liées à une configuration centrale – éjection et collision – se recollent bien et forment une solution d'éjection-collision unique qui quitte le point d'équilibre $r=0$ pour entrer dans le domaine où $r>0$, où elle atteint sa taille maximale, avant de rapetisser sous l'effet de la gravité pour revenir au point de collision triple correspondant dans la variété de collision. Cette solution complète relie l'un à l'autre les deux éléments d'une paire.

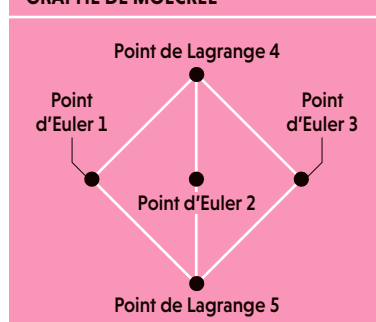
En créant ces points d'équilibre associés aux configurations centrales, au cœur du problème des trois corps, Richard McGehee a donné à Rick Moeckel les clés pour appliquer avantageusement des résultats récents sur les systèmes dynamiques – des résultats inconnus de Newton, Lagrange ou Sundman – au problème des trois corps. Et c'était cette approche dynamique qui m'était revenue à l'esprit après les paroles de Carles Simó et qui m'avait conduit à contacter Rick Moeckel.

LE CHEMIN DE MOECKEL

En effet, en explorant les articles que Rick Moeckel avait publiés sur le sujet dans les années 1980, j'avais remarqué le schéma d'un graphe à cinq sommets, correspondant aux cinq configurations centrales, et reliés par des arêtes.

Un «chemin» sur un graphe est un parcours qui va de sommet en sommet, en passant par les arêtes reliant ces sommets. Rick Moeckel avait démontré que, si l'on suppose les masses des trois corps suffisamment proches, tout chemin sur ce graphe correspond à une solution du problème des trois corps qui s'approche ➤

GRAPHE DE MOECKEL



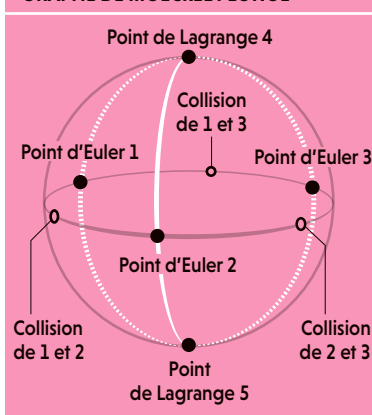
> tour à tour des configurations centrales associées à chaque sommet que le chemin visite.

Par exemple, au chemin E1-L4-E2-L5 correspond une solution qui commence par une éjection très près de la solution d'éjection-collision associée au point d'Euler 1 – les trois astres sont alors presque alignés, comme dans E1 –, grandit jusqu'à un maximum, s'approche ensuite de la phase de collision de la solution associée au point de Lagrange 4, formant presque un triangle équilatéral parfait; mais, au lieu de réaliser exactement cette collision triple, les corps s'éloignent de nouveau en une seconde éjection en triangle équilatéral proche de la phase d'éjection associée au point de Lagrange 4. S'ensuivent une quasi-collision proche de celle, alignée, associée au point d'Euler 2, une éjection quasi alignée toujours liée à E2, pour finir très proche de la collision triple en triangle équilatéral associée au point de Lagrange 5. De plus, si on répète le même chemin sur le graphe de manière périodique, alors il existera une solution correspondante qui sera elle-même périodique.

Peu de temps après que Carles Simó m'a suggéré l'existence d'un mécanisme dynamique, je me suis rendu compte que l'on pouvait plonger le graphe de Moeckel dans la sphère des formes. La propriété cruciale de ce graphe inclus dans la sphère est qu'il contient toute la structure topologique de la sphère privée de ses trois points de collision binaire. En effet, on peut déformer la sphère triplement épointée pour la transformer en ce graphe, ce qui transforme en même temps toute courbe fermée (revenant à son point de départ) sur la sphère épointée en un chemin fermé (revenant à son sommet de départ) sur le graphe.

Pour visualiser cette déformation, imaginons que la sphère soit la surface d'un ballon. Avec une aiguille, faisons trois trous dedans – ce qui revient à retirer des points de la surface –, un pour chaque point de collision binaire. Le ballon étant fait d'un matériau infiniment souple et déformable, on peut étirer les trois trous pour les élargir jusqu'à ce que les bords des trois trous se touchent presque et que le matériau restant forme de fins cordons juste autour des arêtes du graphe de Moeckel. En effectuant cette déformation, toute courbe fermée sur la sphère épointée est déformée en une courbe fermée sur ces cordons, et finalement en un chemin fermé sur le graphe de Moeckel.

GRAPHE DE MOECKEL PLONGÉ



Pour obtenir, à partir de ce processus, un véritable théorème à propos des suites d'éclipses et des solutions du problème des trois corps, je devais prouver que les solutions données par le théorème de Moeckel, vues sur la sphère des formes, ne s'éloignent jamais beaucoup du graphe de Moeckel. En effet, si elles s'en éloignaient, elles pourraient s'enrouler autour des points de collision binaire ou même en rencontrer un, ce qui aurait pour effet d'ajouter ou de supprimer des boucles, et donc de modifier la suite d'éclipses. J'ai donc envoyé un courriel à Rick Moeckel pour lui demander son aide.

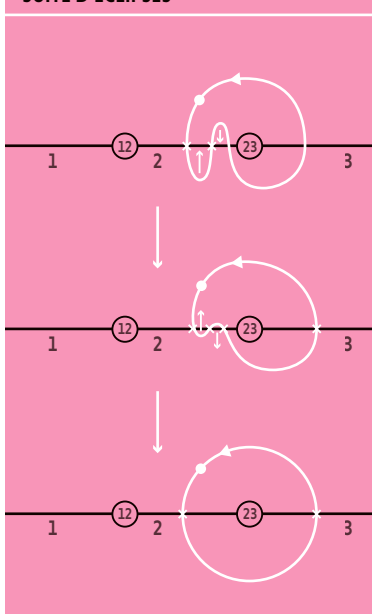
Il m'a répondu: «Tu veux me forcer à relire des articles que j'ai écrits il y a plus de vingt ans?» Il s'est néanmoins replongé dans ses anciens travaux et a démontré que les solutions garanties par son théorème ne s'éloignent jamais trop du graphe dans la sphère des formes. Ma question, dans le cas où les masses des corps sont assez proches, était donc résolue – ou presque.

Presque, car Rick Moeckel avait eu besoin d'un petit peu de moment cinétique pour faire fonctionner sa démonstration. À l'inverse, pendant les dix-sept ans de recherches qui avaient précédé ma conversation avec Carles Simó, je ne m'étais intéressé qu'à des solutions de moment cinétique nul. Cela s'expliquait par le fait que les solutions correspondant à des courbes dans l'espace de configuration qui minimisent l'action, c'est-à-dire celles que j'étudiais, ont forcément un moment cinétique nul.

Toujours est-il que Rick Moeckel avait besoin que le moment cinétique soit petit, mais non nul, pour que les solutions restent bien près du graphe dans la sphère des formes. Intuitivement, ce moment cinétique non nul est nécessaire pour que ces solutions puissent s'approcher des configurations d'Euler ou de Lagrange, puisque ces dernières ont un moment cinétique non nul (les corps y tournent dans le «même sens») et que cette grandeur est constante.

Il restait une autre difficulté dans le résultat de Rick Moeckel: ses solutions, lorsqu'elles croisaient l'équateur de la sphère des formes près des points d'Euler E1, E2 ou E3, oscillaient de part et d'autre de l'équateur plusieurs fois avant de finir par s'en éloigner pour rejoindre l'un des points de Lagrange aux pôles. Pour prendre en compte ces oscillations, je dois introduire ici une nouvelle notion: si N est un entier strictement positif, on dit qu'une suite est « N -longue» lorsque,

SUITE D'ÉCLIPSES



chaque fois qu'un nombre apparaît dans la suite, il est présent au moins N fois d'affilée. Par exemple, la suite 11122233333222 est 3-longue, mais pas 4-longue, puisqu'il n'y a que trois « 1 » d'affilée.

Voici donc le théorème final auquel nous avons abouti avec Rick Moeckel. Considérons le problème des trois corps avec un petit moment cinétique non nul et des masses proches. Alors il existe un grand entier naturel N vérifiant la propriété suivante: pour n'importe quelle suite d'éclipses N -longue, il existe une solution correspondante du problème des trois corps ayant exactement cette suite d'éclipses. Et si la suite est périodique, alors il existe même une solution périodique qui réalise cette suite d'éclipses.

Et ma question originelle? Aucun entier N n'y apparaissait, et j'y recherchais un résultat valide pour toute suite d'éclipses... On était assez loin du compte! En fait, je ne vous ai pas donné ma vraie question. Ce que je voulais vraiment savoir, c'était si l'on pouvait réaliser n'importe quel «type topologique» de courbe périodique, et non toute suite d'éclipses (on peut définir intuitivement le type topologique comme le «motif d'enroulement» de la courbe autour des trous). J'utilisais la suite d'éclipses comme un raccourci pour cette autre notion, en encodant le type topologique dans la suite d'éclipses.

Mais cette représentation d'un type topologique au moyen de sa suite d'éclipses est redondante: beaucoup de suites d'éclipses différentes encodent le même type topologique. Considérons, par exemple, le type topologique «tourner une fois dans le sens antihoraire autour du point 23». La suite d'éclipses 23 représente ce type topologique. Mais c'est aussi le cas des suites 2223, 222223 ou 2333. En effet, chaque fois que l'on traverse deux fois d'affilée l'arc 2, on peut «oublier» ces deux traversées en déformant les méandres, pour faire en sorte que la courbe traverse l'arc deux fois de moins. De cette façon, on supprime toute paire consécutive du même nombre apparaissant dans une suite d'éclipses sans changer le type topologique de la courbe représentée par cette suite. Cette simplification des suites d'éclipses n'a pas de sens physique, car certaines solutions – qui ont donc une réalité physique – ont des suites d'éclipses présentant des répétitions.

Pour répondre maintenant à ma question grâce à notre théorème principal, remarquons qu'en supprimant une à une les paires de nombres égaux consécutifs, on obtient une suite d'éclipses associée au même type topologique de courbe et qui n'a jamais deux nombres égaux consécutifs: elle ne contient pas les motifs 11, 22 ou 33. Nommons une telle suite une «suite admissible». Considérons alors une suite admissible, par exemple 123232.



En cas de moment cinétique nul, la réponse à ma question de départ est «non»



Choisissons un nombre entier impair n supérieur ou égal à l'entier N de notre théorème, et remplaçons la suite admissible par la suite $1^n 2^n 3^n 2^n 3^n 2^n$, prolongée périodiquement, où les exposants signifient ici que l'on répète le nombre (par exemple, $1^3 = 111$). Par construction, cette suite représente le même type topologique que la suite admissible, car n est impair. Notre théorème nous assure que cette nouvelle suite d'éclipses est réalisée par une solution périodique. Cette solution périodique ayant le même type topologique que la suite de départ, on a montré que la réponse à ma question à propos des types topologiques était «oui».

QUELLES PERSPECTIVES?

Il reste encore beaucoup à faire. Quand j'ai posé ma question à propos des types topologiques, il y a vingt ans, je ne m'intéressais qu'à des solutions de moment cinétique nul; or de plus en plus d'indices liés à des travaux menés ces dernières années suggèrent que la réponse à ma question de départ est «non» en cas de moment cinétique nul. Par exemple, on a des raisons de penser que même le type topologique de la suite périodique non vide la plus simple, 23, n'est jamais réalisé par une solution périodique du problème des trois corps avec des masses toutes égales et à moment cinétique nul.

Quant à la version de la question formulée en termes de suites d'éclipses et non de types topologiques, elle reste encore sans réponse, même pour des moments cinétiques non nuls, puisque le théorème ne permet de réaliser que des suites d'éclipses N -longues pour un certain entier N suffisamment grand. Par exemple, nous ne savons absolument pas comment réaliser des suites admissibles.

En fin de compte, nous n'avons peut-être pas beaucoup avancé dans la résolution complète du problème des trois corps, mais, en chemin, nous avons beaucoup appris. Nous allons continuer à chercher, et ce problème sera probablement encore fructueux pour ceux qui s'y intéresseront. Car manifestement, cette énigme classique de l'histoire des mathématiques n'a pas fini de nous étonner. ■

BIBLIOGRAPHIE

R. Moeckel et R. Montgomery, **Realizing all reduced syzygy sequences in the planar three-body problem**, *Nonlinearity*, vol. 28(6), pp. 1919-1935, 2015 (disponible en ligne : <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/28/6/1919/pdf>).

A. Chenciner et R. Montgomery, **A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses**, *Annals of Mathematics*, vol. 152(3), pp. 881-901, 2000 (sur arXiv : <https://arxiv.org/pdf/math/0011268.pdf>).