



Vers les six heures du matin, je fus réveillé par un bruit au-dessus de ma tête, & je fus fort étonné de voir ma chambre très éclairée

Benjamin Franklin

économique de Franklin, car, sans la connaître, cela faisait déjà plus de six mois qu'il avait « communiqué à plusieurs personnes, et à diverses commissions » de semblables idées d'économies. Lui non plus n'avait-il donc pas lu le *Journal* du 26 avril 1784 ? Mais si ce quotidien n'a pas répondu à la lettre de Roederer, ce dernier l'a fait lui-même : il a en effet envoyé au *Journal* une autre lettre anonyme où il propose quelques réponses !

Par la suite, la lettre de Franklin est plus ou moins tombée dans l'oubli en France et n'en est sortie qu'en 1916, à l'occasion des discussions suscitées par un projet d'« avance de l'heure » pendant une partie de l'année. En particulier, plusieurs quotidiens ont livré des extraits de cette lettre à leurs lecteurs. Mais les jugements émis à son sujet furent rares et, si certains ont loué Franklin pour son idée, on les devine assez embarrassés par le ton qu'il a employé. C'est certainement le cas de Camille Couderc, qui, dans le *Bulletin de la Société d'Histoire de Paris*, présente ainsi le texte de Franklin : « Cette lettre est un peu longue et, par endroits, d'une ironie un peu lourde. » C'est le moins que l'on puisse dire ! Mais il ajoute : « Son intérêt rétrospectif, cependant, semble assez grand pour justifier sa réimpression. »

UN HUMORISTE AGUERRI

Bien différent du précédent est le commentaire du physiologiste Charles Richet, Prix Nobel en 1913, qui, dans *Le Figaro* du 19 avril 1916, signala un « curieux article [du] grand Franklin », dont il donna une version abrégée avant de conclure : « Quoique cent trente-deux ans se soient écoulés depuis

l'observation pénétrante faite par Franklin, il est probable qu'en 1916 comme en 1784, le soleil éclaire dès qu'il est levé. » Nul doute que Richet avait bien compris que Franklin plaisantait.

Outre-Atlantique, en revanche, les talents d'humoriste de Franklin étaient déjà bien connus. Il avait exercé cette activité en particulier dans le *Poor Richard's Almanack* (*Almanach du Bonhomme Richard*), publié à Philadelphie de 1732 à 1757. Aussi, lorsque sa lettre a été imprimée en 1790 dans cette même cité et présentée comme « une importante découverte par le dr. Franklin », personne là-bas n'a pu se méprendre sur le sens de son discours.

De fait, le texte de Franklin possède plusieurs ingrédients du parfait canular : récit circonstancié s'appuyant sur une authentique démonstration de lampes, incident plausible des volets non rabattus, calcul détaillé des économies réalisables. Sans oublier les clins d'œil : une touche de naïveté, l'exagération du tir au canon dans les rues et surtout l'énormité de sa découverte ! Avec ce texte humoristique très habilement composé, sans nul doute un morceau d'anthologie, Franklin se situe dans la succession de l'écrivain irlandais Jonathan Swift, du moins si l'on pense, en oubliant ici la noirceur de l'humour, à la *Modeste Proposition* (1729) de ce dernier pour réduire la misère en Irlande : nourrir le peuple affamé avec de la viande de nourrisson.

Les travaux scientifiques de Franklin lui avaient valu de devenir, en 1756, *fellow* de la Royal Society de Londres, qui lui avait décerné la médaille Copley en 1753, et membre associé étranger de l'Académie des sciences de Paris en 1772. En raison de cette notoriété, on imagine mal qu'il aurait choisi de présenter son idée d'heure d'été de façon humoristique s'il avait été convaincu de son utilité. Au contraire, c'est peut-être à la suite de l'incident réel des volets que lui serait venue une autre idée, celle purement facétieuse d'écrire une blague autour d'une proposition d'avance du lever qu'il n'aurait jamais sérieusement envisagée. En l'occurrence, Benjamin Franklin mériterait bien davantage d'être reconnu comme talentueux humoriste que comme précurseur.

En France, la nécessité de réaliser des économies en temps de guerre a conduit le député André Honnorat à déposer un projet de loi le 21 mars 1916. De longues discussions aboutirent à la loi du 9 juin qui instituait une heure d'été, en avance d'une heure sur celle de Greenwich adoptée en 1911. Seule l'année 1916 était d'abord concernée, mais la pratique de cette heure d'été a subsisté jusqu'en 1939. Non retenue à la Libération, l'heure d'été est réapparue en 1976 à des fins d'économies d'énergie après le choc pétrolier de 1973. Franklin n'aurait sans doute pas imaginé une telle issue à son canular... ■

BIBLIOGRAPHIE

J. Gapaillard, *Histoire de l'heure en France*, Vuibert, 2011.

P. M. Zall, *Benjamin Franklin's humor*, The University Press of Kentucky, 2005.

Bulletin de la Société d'Histoire de Paris, pp. 93-101, 1916.

L. Figuier, *Les Merveilles de la science*, tome 4, pp. 14-27, 1870.

Œuvres du comte P. L. Roederer, t. 5, 1857.

Journal de Paris, n° 117, 26 avril 1784.

R

ENDEZ-VOUS

P.72 Logique & calcul
 P.78 Art & science
 P.80 Idées de physique
 P.84 Chroniques de l'évolution
 P.89 Science & gastronomie
 P.90 À picorer

QUAND LES MACHINES FONT DES MATHÉMATIQUES

Les intelligences artificielles seront-elles un jour capables de produire des théorèmes aussi intéressants que ceux des mathématiciens humains? On en est encore loin, mais les choses avancent peu à peu.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Il est évident que l'invention et la découverte, que ce soit en mathématiques ou ailleurs, se fait en combinant des idées. Or, il existe un très grand nombre de combinaisons possibles, dont la plupart sont sans intérêt, alors qu'au contraire très peu d'entre elles sont fructueuses. Lesquelles notre esprit, notre esprit conscient, perçoit-il? Celles qui sont fructueuses ou qui pourraient l'être.

Jacques Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Albert Blanchard, 1959.

Les ordinateurs aident les mathématiciens d'une multitude de manières: ils facilitent l'édition des textes et la communication entre chercheurs; ils font des calculs numériques et symboliques, en produisant par exemple des milliers de milliards de décimales de π ; grâce aux programmes «assistants de preuves», ils aident les mathématiciens à mettre au point les longues démonstrations et à les vérifier; parfois, les algorithmes de démonstration automatique découvrent des

preuves qu'aucun mathématicien n'avait trouvées (voir l'encadré 1).

Cependant, à côté de cette aide exploitant la fiabilité et la rapidité des machines, est-ce que celles-ci peuvent se substituer aux chercheurs et faire avancer un domaine mathématique en y découvrant de nouvelles idées, de nouvelles formules, de nouvelles conjectures ou de nouveaux théorèmes intéressants?

On a précisé «intéressants», car on sait depuis longtemps produire mécaniquement des théorèmes en utilisant des programmes. À chaque système axiomatique, celui de l'arithmétique, celui de la théorie des ensembles, etc., est associé un algorithme qui en énumère les théorèmes. Malheureusement ces algorithmes d'énumération produisent des masses de résultats évidents et sans valeur.

L'intelligence, le savoir particulier et l'intuition d'un mathématicien lui font aborder un domaine avec finesse en repérant des énoncés particuliers, en général assez courts et difficiles à démontrer. Ces énoncés sont des jalons dans leurs travaux; ils leur évitent de se perdre dans

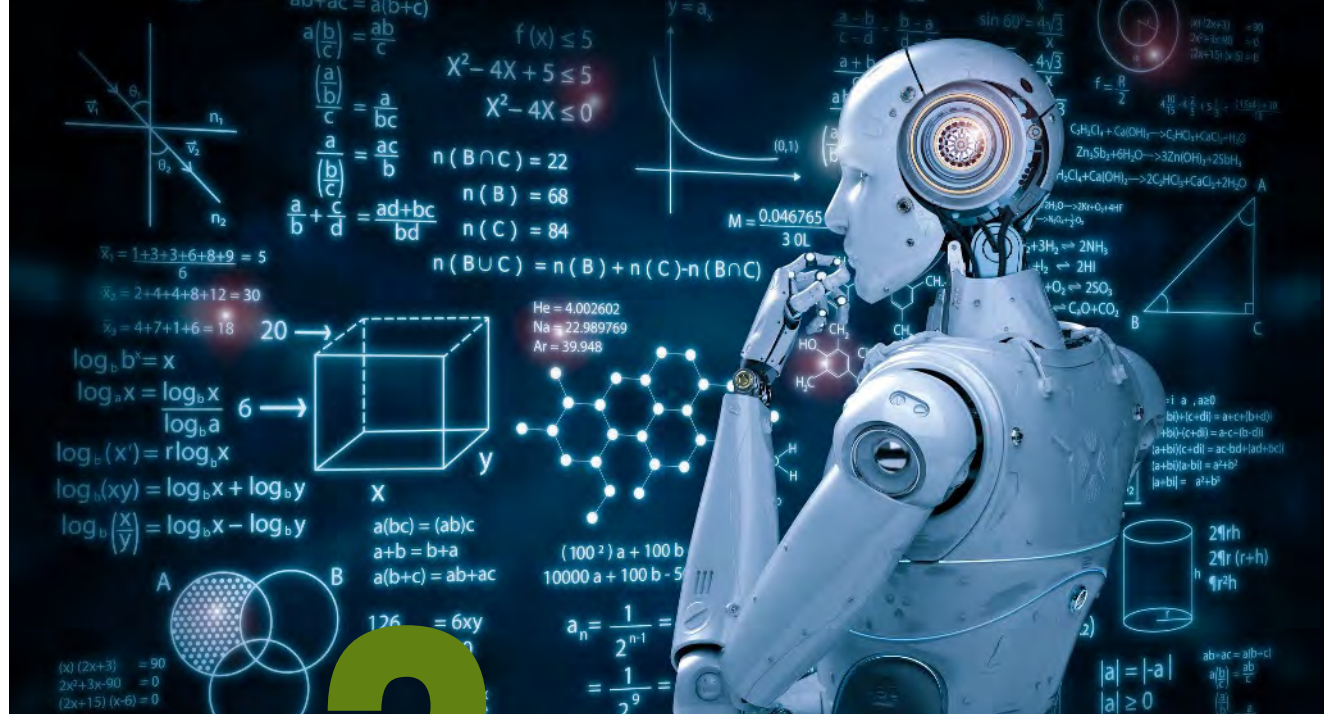
QUELS TYPES DE RECHERCHES?

1

L'intelligence artificielle en mathématiques a trois objectifs.
 (a) L'aide à la démonstration et à la rédaction détaillée et contrôlée de démonstrations compliquées. Dans ce domaine, des succès ont été obtenus, comme la mise au point

définitive de la démonstration de la conjecture de Kepler sur l'empilement le plus compact possible des sphères dans l'espace, démonstration due à Thomas Hales en 2014.
 (b) La démonstration automatique : l'ordinateur recherche seul une

démonstration. Quelques succès ont été obtenus.
 (c) La recherche et la suggestion d'idées, de conjectures et de théorèmes nouveaux et intéressants. C'est ce dernier aspect qui est principalement envisagé dans cet article.



2

l'infini des vérités faciles et trop proches les unes des autres. L'intelligence artificielle peut-elle concevoir des méthodes qui égalent les mathématiciens dans le travail d'imagination et de construction ordonnée des théories mathématiques, qui ne sont pas des successions ennuyeuses de vérités triviales comme $1+1=2$, $1+2=3$, $1+3=4$, etc.?

Nous allons voir que la «recherche automatisée» progresse petit à petit: il se peut que, imperceptiblement, nous entrons dans une nouvelle ère.

PREMIÈRES TENTATIVES

Le logicien Hao Wang, un ami d'Einstein à Princeton, écrivit en 1959 un programme pour produire et sélectionner des théorèmes du calcul propositionnel, une partie de la logique où l'on traite de formules du type $(A \text{ et } B) \Rightarrow A$, $(A \text{ ou non-}A)$, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{non-}B \Rightarrow \text{non-}A)$. Cette tentative lui fit prendre conscience que le problème principal était de sélectionner les résultats «intéressants», mais le domaine trop étroit du calcul propositionnel fit qu'aucun résultat spectaculaire ne sortit de cette première tentative.

En juillet 1976, Douglas Lenat soutint à Stanford un mémoire de doctorat dont le sujet était son «mathématicien automatique», le programme AM (pour Automated Mathematician). Il y décrivait un programme en langage LISP, qui, à partir de règles et de manipulations symboliques, déduit et accumule des concepts et des propriétés de ces concepts. Douglas Lenat explique que son programme a découvert la notion de nombre premier, a énoncé le théorème de décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Il aurait aussi redécouvert la fameuse conjecture >

FAIRE DES CONJECTURES INTÉRESSANTES

Pour concevoir des systèmes menant une recherche mathématique, il faut faire en sorte que ces systèmes effectuent des tris. Un tel système ne doit retenir que les propriétés et conjectures les plus intéressantes. Le Britannique Simon Colton, qui a développé le système HR (voir le texte principal), propose six critères pour repérer les conjectures intéressantes.

- 1) Les conjectures doivent être plausibles. Il faut éliminer celles qui sont fausses parce qu'il existe des exemples simples qui les contredisent.
- 2) Les conjectures doivent être nouvelles. Le système doit disposer des résultats connus sur le sujet étudié et savoir les exploiter pour ne pas proposer les conséquences immédiates de résultats connus.
- 3) Les résultats envisagés doivent être étonnants. John Conway pense qu'un résultat est d'autant plus intéressant qu'il est «scandaleux» (outrageous). Il est délicat de concevoir des programmes sachant définir ce qui est «étonnant». Le plus souvent, on se contente d'éliminer les énoncés qui sont des conséquences immédiates d'énoncés connus ou qui sont des cas particuliers de formules logiques toujours vraies, comme $\text{non}(\text{non-}A) \Leftrightarrow A$. Une propriété simple qui exige une longue démonstration est étonnante puisqu'on ne peut pas comprendre aisément ce qui la rend vraie. Malheureusement, la notion : « exige une longue

démonstration » est impossible à programmer en pratique, car, pour l'affirmer d'un énoncé, il faudrait explorer tous les chemins de démonstrations possibles pouvant y conduire.

4) Les conjectures doivent concerner de nombreux cas. Si l'on s'intéresse à des propriétés P_1 et P_2 , la conjecture $P_1 \Rightarrow P_2$ n'est intéressante que si une grande proportion des objets jouit de la propriété P_1 .

5) Les conjectures doivent être facilement compréhensibles et donc doivent avoir des énoncés assez courts et si possible ne faire intervenir que les concepts de base de la théorie étudiée.

6) Les conjectures doivent être fécondes et par exemple avoir beaucoup de conséquences simples. En mathématiques, il est difficile d'anticiper cette qualité d'une conjecture. Le grand théorème de Fermat n'est considéré comme fécond que parce qu'il a résisté pendant des siècles. Si Fermat l'avait démontré en quelques lignes, personne n'aurait estimé l'énoncé de ce théorème comme intéressant.

Sur ce sujet, voir : S. Colton et al., « On the notion of interestingness in automated mathematical discovery », *International Journal of Human-Computer Studies*, vol. 53(3), pp. 351-375, 2000.

> de Goldbach, toujours non démontrée («Tout nombre pair à partir de 4 est somme de deux nombres premiers»). Cependant, ces affirmations ont été discutées car elles résultent d'une interprétation indirecte *a posteriori* des calculs d'AM et parce qu'il est difficile de savoir si ce qui est présent dans le programme avant sa mise en route n'est pas déjà suffisamment déterminant pour que de telles «découvertes» se produisent nécessairement.

Ce problème de savoir si un système fait vraiment une découverte ou s'il est forcé de la faire par les mécanismes simples programmés au départ se retrouvera pour tous les systèmes qui ont succédé à cette tentative de mathématicien automatique. La résolution de cette difficulté ne peut provenir que de la découverte par la machine d'idées ou de propriétés nouvelles et reconnues intéressantes par les mathématiciens eux-mêmes.

Après ce premier essai, Douglas Lenat travailla sur un système nommé Eurisko, lui aussi destiné à produire des découvertes mathématiques. Son originalité est qu'il créait spontanément des règles heuristiques nouvelles à l'aide de métarègles du type: «Donner la priorité aux règles les plus simples». Face aux difficultés à obtenir des résultats concluants, Douglas Lenat entreprit de concevoir et programmer un système dénommé Cyc, qui maîtrise des connaissances générales de tout humain, ce qu'il considérait comme indispensable pour aller plus loin en intelligence artificielle (IA). Pour lui, un système intelligent doit savoir que «si un humain marche, il ne reste pas à la même place» ou que «quand il pleut, les passants dans la rue sont mouillés et certains ouvrent des parapluies», etc.

Le projet Cyc, démarré en 1983, a bénéficié depuis d'un travail équivalent à plus de mille hommes-années et se poursuit aujourd'hui encore. C'est le plus ambitieux et long projet d'intelligence artificielle jamais mené. Il a

développé un savoir général et plusieurs savoirs particuliers liés à des sous-domaines, dont celui du terrorisme qui est probablement utilisé par l'agence américaine NSA (National Security Agency). Le système connaît plus d'un million de termes comme «la France», «le kilogramme», «New York», «les poissons», «la chasse»... et plus de 24 millions d'affirmations de base les concernant et les liant. Elles sont écrites dans un langage logique et disposent d'un système de déduction qui permet, à partir des affirmations de base, d'en produire de nouvelles.

Cette recherche appartient à l'«IA symbolique»: les méthodes ne s'appuient pas sur des réseaux de neurones, ce sont des programmes manipulant des symboles, des mots, des concepts représentés par des éléments de programmes. Les humains qui les écrivent comprennent le détail de ce qu'ils y mettent et de ce qui se produit quand la machine fonctionne, contrairement aux réseaux de neurones de l'«apprentissage profond», où le système n'explique pas ses réponses. Le lien avec les mathématiques est devenu secondaire dans le projet Cyc, bien qu'un module ait été conçu pour aider les étudiants en mathématiques.

Depuis les succès des approches de type apprentissage profond, par exemple pour le jeu de go, le projet Cyc est regardé avec méfiance. Pourtant, il semble certain que les progrès de l'IA devront associer la capacité de raisonnement et les connaissances générales de systèmes comme Cyc avec des méthodes de type statistique et neuronal.

RECHERCHE DE CONCEPTS

Quelques années après Eurisko, Simon Colton, de l'université d'Edimbourg, a réussi à faire «imaginer» des notions mathématiques nouvelles à son programme, dénommé HR en l'honneur des mathématiciens Godfrey Hardy et Srinivasa Ramanujan, génie ayant découvert

LES NOMBRES REFACTORISABLES

3

Parmi plusieurs idées arithmétiques analogues, celle des nombres «refactorisables» a été proposée par le programme HR de Simon Colton. Un nombre entier n est refactorisable s'il est divisible par le nombre de ses diviseurs. Si p est un nombre premier, alors p^{p-1} est refactorisable, car ses diviseurs sont $1, p, p^2, p^3, \dots, p^{p-1}$, qui sont au nombre de p . Cette propriété arithmétique avait déjà été envisagée indépendamment par d'autres chercheurs, ce qui confirme que c'est une idée mathématique intéressante. Les premiers nombres refactorisables sont : 1, 2, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 40, 56, 60, 72, 80, 84, 88, 96, 104, 108, 128, 132, 136, 152, 156, 180, 184, 204, 225, 228, 232, 240, 248, 252, 276, 288, 296, 328, 344, 348, 360, 372...

Voici cinq théorèmes sur les nombres refactorisables, dont les trois derniers ont été découverts par HR :

Théorème 1. Il existe une infinité de nombres refactorisables pairs, et une infinité de nombres refactorisables impairs.

Théorème 2. Tous les nombres impairs refactorisables sont des carrés.

Théorème 3. Un nombre parfait (égal à la somme de ses diviseurs propres, comme $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$) n'est jamais refactorisable.

Théorème 4. Si n est refactorisable, alors n est de la forme $8k, 8k + 1, 8k + 2$ ou $8k + 4$.

Théorème 5. La somme des diviseurs d'un nombre impair refactorisable est elle-même impaire.

une multitude de formules extraordinaires qui n'ont parfois été démontrées qu'après sa mort.

Le programme HR s'est intéressé à l'arithmétique et a tenté à la fois de créer des concepts nouveaux – des définitions de suites numériques nouvelles –, de formuler des hypothèses à leur sujet et parfois de les démontrer à l'aide de programmes de démonstration automatique qu'il mettait à son service. Le programme disposait de critères pour ne se concentrer que sur des définitions potentiellement intéressantes. Il a pu ainsi identifier 14 suites numériques nouvelles, qui ont été acceptées en 2000 par l'Encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (<http://oeis.org>), où ne figurent que les suites ayant de l'intérêt aux yeux des mathématiciens.

L'une des suites proposées par HR est étonnamment simple et a conduit Simon Colton à publier un article dans le *Journal of Integer Sequences* en 1999. Il s'agit de la suite des «nombres refactorisables». Un entier n est refactorisable s'il est divisible par le nombre de ses diviseurs. L'entier 9 est par exemple refactorisable, car il a 3 diviseurs (1, 3 et 9) et que justement il est divisible par 3. Plus généralement, si p est premier, p^{p-1} est refactorisable.

À vrai dire, cette invention particulière du programme de Colton n'en n'était pas tout à fait une, car après la publication de l'article de 1999, on s'est aperçu qu'un autre article publié en 1990 avait envisagé la même notion... HR n'était donc pas le premier à s'intéresser à la notion, mais cela confirme que l'idée proposée est réellement jugée intéressante par les mathématiciens.

Notons que le programme de Simon Colton a découvert tout seul cette jolie propriété: «Si la somme des diviseurs d'un entier est un nombre premier, alors le nombre de diviseurs de ce nombre est aussi un nombre premier.»

Le programme HR a aussi inventé des notions concernant les groupes, les anneaux finis et les graphes. Il dispose de diverses mesures évaluant l'intérêt d'un concept, se concentre sur le plus prometteur et cherche alors à énoncer des propriétés le concernant pour lesquelles il tente de trouver des démonstrations ou des contre-exemples. Cette façon de procéder est proche de ce que font souvent les chercheurs en mathématiques, mais partiellement car un chercheur prend de la distance vis-à-vis de son sujet et tente d'établir des liens entre concepts appartenant à des champs éloignés.

UN VRAI SUCCÈS SUR LES GRAPHEs

Le principe général de HR est particulièrement efficace quand il s'agit de structures finies, car le programme peut disposer d'une liste variée d'exemples et les utiliser pour tester si les propriétés qu'il envisage sont vérifiées par chaque élément de sa base d'exemples. Si c'est le cas, la propriété devient plausible et le système l'envisage comme conjecture. Si l'un des exemples

4

LA MÉTHODE GRAFFITI

Le programme Graffiti énumère et sélectionne des conjectures portant sur les invariants des graphes.

- Le programme considère les invariants $inv_1, inv_2, \dots, inv_k$ et dispose pour chacun d'un sous-programme qui le calcule. Parmi les invariants possibles, il y a le nombre de nœuds du graphe, le nombre maximal de liens d'un nœud du graphe avec les autres nœuds, etc.

- Le programme dispose d'une base de test formée des graphes $G_1, G_2, \dots, G_n$. Cette base peut être complétée au fur et à mesure de l'utilisation du système pour le rendre plus efficace.

- Le programme dispose d'un système qui énumère les relations algébriques entre invariants. Ce système

engendre par exemple

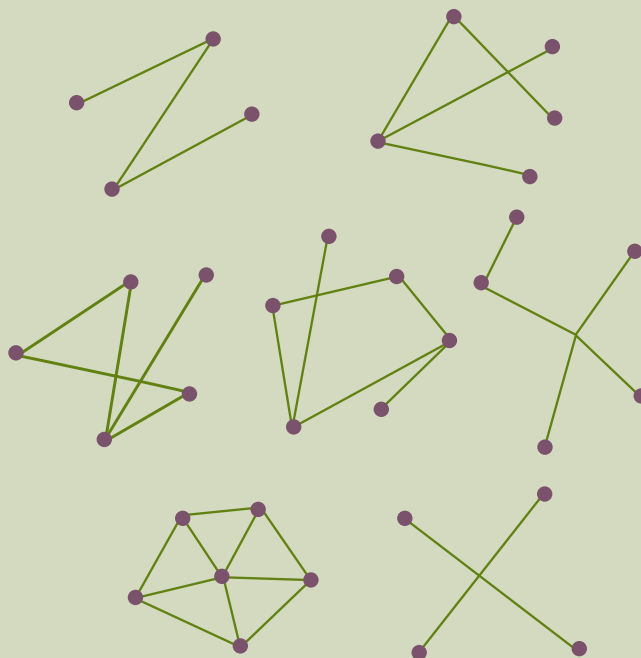
$$inv_1 + inv_2 \leq inv_3,$$

$$inv_3/inv_4 > (inv_1)^2, \text{ etc.}$$

Le système donnera la priorité aux relations simples.

- La recherche de conjectures portant sur les invariants consiste alors à tester les relations algébriques énumérées par le système. Celui-ci élimine toute relation non vérifiée par l'un des graphes de la base de test.

- Les relations algébriques passant les tests sont soumises à une seconde série de tests pour déterminer si elles sont connues ou résultent de relations connues. Les relations non écartées sont proposées comme conjectures aux mathématiciens, qui tentent de les démontrer.



Quelques exemples de graphes. Le système Graffiti s'appuie sur une base constituée de nombreux graphes pour tester des relations algébriques entre les «invariants» (nombre de nœuds d'un graphe, nombre moyen d'arêtes entre deux nœuds, etc.).

> contredit la propriété examinée, alors il est certain qu'elle est fausse, et il l'abandonne.

La théorie des graphes se prête bien à cette approche, et c'est pourquoi les méthodes automatiques de recherche de conjectures en théorie des graphes ont donné les premiers exemples incontestables de découvertes mathématiques faites par l'ordinateur.

Le programme Graffiti est la première grande réussite de cette approche. Il a été développé et utilisé de 1984 à 2002 par le mathématicien polonais Siemion Fajtlowicz.

Graffiti s'intéresse particulièrement aux invariants des graphes. Ce sont par exemple le diamètre du graphe (la distance – en nombre d'arêtes – maximale séparant deux nœuds), le nombre chromatique d'un graphe (le nombre minimal de couleurs qu'il faut pour colorer les nœuds du graphe en évitant que deux nœuds voisins soient de même couleur), le degré maximal d'un graphe (nombre maximal de voisins d'un nœud), etc.

Plusieurs dizaines d'invariants sont étudiés et les relations entre ces invariants sont complexes, mais essentielles pour la théorie.

En menant des recherches automatisées de relations entre ces invariants, Graffiti a

proposé de nombreuses conjectures intéressantes. Le programme élimine toutes les conjectures contredites par un des graphes qu'il connaît, et celles classiques ou s'en déduisant facilement. Siemion Fajtlowicz indique d'ailleurs que c'est ce travail de sélection qui a été le plus délicat et complexe à programmer. Parmi les conjectures de Graffiti, certaines ont été démontrées par la suite ou invalidées par des chercheurs de la discipline, donnant lieu à plusieurs publications scientifiques et thèses universitaires.

Il ne fait pas de doute que ce programme et ses successeurs contribuent réellement aux progrès mathématiques. Siemion Fajtlowicz a d'ailleurs été amené à travailler avec les meilleurs spécialistes de la théorie des graphes comme Paul Erdős, Bela Bollobas ou Paul Spencer. Erdős et ses coauteurs, dans un article de 1988 où ils démontrent l'une des conjectures du programme Graffiti, reconnaissent son apport. La conjecture en question affirme que $dm_G \leq r_G$, où dm_G est la distance moyenne entre deux nœuds du graphe G , et r_G est la somme des inverses du nombre de voisins des nœuds de G .

En reprenant le principe de Graffiti, d'autres thèmes de recherche ont été abordés et ont donné lieu à une interaction entre mathématiciens humains et ordinateurs proposant conjectures, réfutations et parfois démonstrations. Aujourd'hui encore, en théorie des graphes et dans certains autres domaines, l'utilisation de générateurs de conjectures aide les chercheurs.

RECHERCHER DES FORMULES

Un événement remarquable s'est produit en 1995 dans le domaine de l'aide informatique à la recherche mathématique. Simon Plouffe a programmé sa machine pour qu'elle explore des formules d'un certain type donnant le nombre π et en a effectivement trouvé une que personne ne soupçonnait. Ici, les objets manipulés ne sont pas finis, puisqu'il s'agit de nombres réels ayant une infinité de décimales. Même si la méthode utilisée pour les conjectures sur les graphes ne s'applique pas, le procédé utilisé lui ressemble.

On se donne plusieurs nombres réels dont on connaît des évaluations aussi précises qu'on le veut ; c'est le cas pour π , et pour les sommes de séries dont le terme général est de la forme $1/[r^*(ak+b)]$. On recherche alors s'il existe une combinaison linéaire à coefficients entiers entre les nombres choisis qui soit nulle avec quelques décimales de précision. C'est un travail patient de calcul impossible à mener à la main, mais pour lequel on dispose d'algorithmes efficaces. Quand une relation est trouvée, on teste si elle reste vraie avec un plus grand nombre de décimales. Là encore, c'est

5 L'ORDINATEUR MATHÉMATICIEN ?

Voici les réponses données en 2014 par de célèbres mathématiciens

à la question : « Dans cent ans ou dans mille ans, les ordinateurs dépasseront-ils les humains en mathématiques comme ils les dépassent maintenant au jeu d'échecs ? »
Terence Tao (médaille Fields en 2006) : « Les ordinateurs vont certainement devenir encore plus puissants, mais j'espère que l'essentiel du travail mathématique continuera d'être fait par des humains... utilisant des ordinateurs. »

Richard Taylor (ce professeur à l'université Harvard a aidé Andrew Wiles à démontrer le grand théorème de Fermat) : « Une meilleure question serait : est-ce qu'un ordinateur recevra la médaille Fields ? »

Jacob Lurie (professeur à l'IAS de Princeton) : « Mille ans, c'est une durée trop longue pour faire des prévisions. »

David Ruelle (professeur à l'Institut des hautes études scientifiques) envisage une sorte de passage de témoins de l'homme à la machine pour



Terence Tao



Richard Taylor



Jacob Lurie



David Ruelle



Marcus du Sautoy

faire des mathématiques :
« La capacité intellectuelle à faire des mathématiques est un développement récent du point de vue de l'évolution biologique. J'ai du mal à croire que ce développement récent ait produit quelque chose de si unique qu'il ne peut être imité avec succès par les ordinateurs. Je pense plutôt que la créativité mathématique humaine [...] est une étape dans l'évolution, et qu'il y aura d'autres étapes. La grande question devient alors : quel genre de mathématiques pourrait être produit par une créativité mathématique artificielle ? »
Marcus du Sautoy (professeur à Oxford), dans son livre *The Creativity Code* (2019), indique : « Les méthodes d'apprentissage automatique donnent aujourd'hui des résultats décevants en mathématiques. Seront-elles un jour capables de s'appliquer aux mathématiques que nous aimons et d'en créer qui leur ressemblent ? C'est bien possible et l'échec actuel est probablement simplement un sursis. »

une question de calcul. Si la relation est numériquement confirmée, l'algorithme propose la conjecture. En utilisant alors les méthodes classiques, le mathématicien reprend la main et tente de démontrer l'égalité.

C'est ainsi que la formule suivante fut découverte, puis rapidement démontrée:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

L'intérêt de cette formule est qu'elle permet de calculer les chiffres binaires de π à un endroit donné du développement binaire, sans avoir à calculer les chiffres qui précèdent. Incontestablement, l'ordinateur avait découvert un résultat intéressant. Grâce à ce type de formules, on connaît aujourd'hui des chiffres binaires de π autour de la position 4×10^{16} alors que les méthodes qui calculent tout ne permettent pour l'instant que d'atteindre la position 3×10^{14} .

TROUVER DES DÉMONSTRATIONS

Un certain nombre de tentatives ont été faites pour introduire dans le domaine des mathématiques des méthodes de nature statistique et neuronale.

Kshitij Bansal et son équipe, au centre de recherche de Google à Mountain View, en Californie, a mis au point un programme, intitulé HOList, pour démontrer des théorèmes en se fondant sur une méthode d'apprentissage. Partant du système d'aide à la formalisation et au contrôle des démonstrations HOL-Light, qui a été utilisé pour la mise au point de la démonstration de la conjecture de Kepler en 2014, les chercheurs ont programmé un outil automatique qui recherche des démonstrations en s'inspirant d'une base de démonstrations fournies en exemples. Le système a eu accès à plus de 10 000 démonstrations de théorèmes, exprimées dans le langage de HOL-Light. Parmi elles de nombreuses démonstrations de résultats intermédiaires de la preuve de la conjecture de Kepler.

Notons que ces démonstrations avaient presque toujours été mises au point par un travail guidé par des mathématiciens. Grâce aux paramètres du réseau de neurones du système HOList, ajustés par des milliers d'exemples, celui-ci sait mieux comment choisir et ordonner les éléments d'une démonstration pour atteindre un but. On lui a resoumis les énoncés des théorèmes ayant servi à son apprentissage, et il a pu retrouver, grâce aux tactiques de démonstration apprises, et cette fois seul sans guidage par des mathématiciens, la démonstration de 58 % d'entre eux. Plus intéressant, quand on lui a soumis 3 217 énoncés pris en dehors des énoncés de la base d'exemples, et qu'on a demandé au système de les démontrer, il a su le faire pour 1 251 d'entre

eux. Mais pour l'instant, le système n'a pas découvert de théorèmes nouveaux.

CALCULER DES PRIMITIVES

Un autre exemple tout récent d'utilisation de l'apprentissage profond concerne le calcul des primitives en analyse et la résolution d'équations différentielles. Certaines méthodes utilisées par les mathématiciens, par exemple l'intégration par parties, ou le changement de variable, sont programmées pour qu'un système réussisse seul des calculs d'intégrales. Beaucoup de travaux ont été ainsi menés conduisant à des programmes de plus en plus complexes et efficaces. En reprenant le problème avec des méthodes d'apprentissage et des réseaux de neurones, Guillaume Lample et François Charton, de Facebook, ont mis au point une méthode différente, fondée sur la présentation d'exemples à un réseau de neurones soigneusement configuré pour apprendre sur ce type de problèmes symboliques.

Les exemples proposés au système étaient de trois types: (1) des paires $[f, F]$, où F est une primitive de f , provenant des programmes de calcul fondés sur l'algorithme de Risch ou une de ses variantes; (2) des paires provenant de dérivation qui, elle, est facile et maîtrisée depuis longtemps, contrairement au calcul de primitives: on dérive F , ce qui donne f , d'où la paire $[f, F]$; (3) des paires exploitant la méthode d'intégration par parties.

Les performances du système obtenu égalent et parfois dépassent celle des systèmes classiques comme Mathematica et Matlab. Cela montre de nouveau que l'association de méthodes purement symboliques (dans la phase d'apprentissage) et de méthodes neuronales fait progresser la solution de problèmes symboliques.

L'HUMAIN RESTE INÉGALÉ

Ainsi, pour certaines tâches spécialisées, les programmes égalent ou battent les humains, mais ces méthodes ont toujours des champs de réussite étroits. Même si, indubitablement, la recherche mathématique en tire une aide, les systèmes conçus aujourd'hui se bloquent et cessent de progresser.

Il est formidable d'avoir développé des systèmes informatiques qui formulent d'hypothétiques relations entre les paramètres des graphes, qui mènent des calculs arithmétiques et en tirent des formules de séries nouvelles, qui effectuent des calculs de primitives ou proposent quelques concepts inattendus par combinaison.

Cependant, tous atteignent vite leurs limites. Au contraire, les mathématiciens bouillonnent d'idées nouvelles que les ordinateurs aident parfois à maîtriser, mais en restant toujours de simples esclaves calculateurs sans véritable créativité. L'ordinateur authentiquement mathématicien n'est pas encore là, on attend sa venue! ■

BIBLIOGRAPHIE

An environment for machine learning of higher-order theorem proving, *Proc. of the 36th International Conference on Machine Learning*, 2019.

G. Lample et F. Charton. **Deep learning for symbolic mathematics**, prépublication arXiv:1912.01412, 2019.

C. E. Larson et N. Van Cleemput, **Automated conjecturing I : Fajtlowicz's Dalmatian heuristic revisited**, *Artificial Intelligence*, vol. 231, pp. 17-38, 2016.

D. B. Lenat et P. J. Durlach, **Reinforcing math knowledge by immersing students in a simulated learning-by-teaching experience**, *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, vol. 24, pp. 216-250, 2014.

C. E. Larson, **A survey of research in automated mathematical conjecture-making**, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 69, pp. 297-316, 2005.

S. Colton, **Automated Theory Formation in Pure Mathematics**, Springer, 2002.

S. Colton, **Refactorable numbers – a machine invention**, *Journal of Integer Sequences*, vol. 2., article 99.1.2, 1999.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

LA MER... QU'ON VOIT MONTER

Comment se représenter la hausse du niveau des mers?
Deux artistes finlandais ont une solution: des lignes de LED.

Les études se succèdent et les prévisions sont à chaque fois plus alarmantes. Parmi les dernières en date, en octobre 2019, Scott Kulp et Benjamin Strauss, de l'organisation Climate Central, à Princeton, aux États-Unis, montrent que 300 millions de personnes seront exposées aux inondations côtières en 2050; c'est trois fois plus qu'on ne l'imaginait jusque-là. Un mois plus tôt, le Giec dénonçait dans un rapport l'accélération du rythme moyen global de la montée des eaux: depuis 2006, il

est de 3,6 millimètres par an. Les chiffres se multiplient, mais restent néanmoins abstraits, et même semblent dérisoires, tant il est difficile de se représenter à quoi ils correspondent. Le travail des artistes finlandais Timo Aho et Pekka Niittyvirta peut nous éclairer.

Dans le cadre de l'exposition «Champs Libres» dédiée à la transition écologique, au Maif Social Club, à Paris, ils présentent *Lines* (57° 59' N, 7° 16' W). Ils ont décidé de montrer de façon concrète, et poétique, la réalité de l'élévation du niveau marin en investissant le pourtour du centre des arts Taigh Chearsabhagh, dans le village de Lochmaddy, sur l'île de North Uist, dans l'archipel écossais des Hébrides extérieures. Pourquoi là? L'endroit est apparu «particulièrement pertinent, précise Timo Aho, car il ne peut pas se développer en raison justement de la montée des eaux, mais aussi des tempêtes».

Cette maison de Lochmaddy, en Écosse, ne sera pas épargnée par la hausse du niveau marin, que visualisent des ampoules lumineuses.

L'installation des deux Finlandais consiste en des lignes de LED de basse énergie reliées à des capteurs de marée. Quand elle monte, les ampoules s'illuminent et, en soulignant les interactions des humains et de la nature, figurent sur la base des données du Giec (le pire scénario) le possible futur niveau des eaux dans la campagne et sur les murs des différents bâtiments. Pas de doute, le paysage sera radicalement transformé et la vie fortement perturbée, la plupart des maisons étant exposées aux inondations. Les risques à venir deviennent palpables et saisissants.

De fait, rappellent les deux artistes, «l'art a la capacité de faire passer des idées

