

une question de calcul. Si la relation est numériquement confirmée, l'algorithme propose la conjecture. En utilisant alors les méthodes classiques, le mathématicien reprend la main et tente de démontrer l'égalité.

C'est ainsi que la formule suivante fut découverte, puis rapidement démontrée:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

L'intérêt de cette formule est qu'elle permet de calculer les chiffres binaires de π à un endroit donné du développement binaire, sans avoir à calculer les chiffres qui précèdent. Incontestablement, l'ordinateur avait découvert un résultat intéressant. Grâce à ce type de formules, on connaît aujourd'hui des chiffres binaires de π autour de la position 4×10^{16} alors que les méthodes qui calculent tout ne permettent pour l'instant que d'atteindre la position 3×10^{14} .

TROUVER DES DÉMONSTRATIONS

Un certain nombre de tentatives ont été faites pour introduire dans le domaine des mathématiques des méthodes de nature statistique et neuronale.

Kshitij Bansal et son équipe, au centre de recherche de Google à Mountain View, en Californie, a mis au point un programme, intitulé HOList, pour démontrer des théorèmes en se fondant sur une méthode d'apprentissage. Partant du système d'aide à la formalisation et au contrôle des démonstrations HOL-Light, qui a été utilisé pour la mise au point de la démonstration de la conjecture de Kepler en 2014, les chercheurs ont programmé un outil automatique qui recherche des démonstrations en s'inspirant d'une base de démonstrations fournies en exemples. Le système a eu accès à plus de 10 000 démonstrations de théorèmes, exprimées dans le langage de HOL-Light. Parmi elles de nombreuses démonstrations de résultats intermédiaires de la preuve de la conjecture de Kepler.

Notons que ces démonstrations avaient presque toujours été mises au point par un travail guidé par des mathématiciens. Grâce aux paramètres du réseau de neurones du système HOList, ajustés par des milliers d'exemples, celui-ci sait mieux comment choisir et ordonner les éléments d'une démonstration pour atteindre un but. On lui a resoumis les énoncés des théorèmes ayant servi à son apprentissage, et il a pu retrouver, grâce aux tactiques de démonstration apprises, et cette fois seul sans guidage par des mathématiciens, la démonstration de 58 % d'entre eux. Plus intéressant, quand on lui a soumis 3 217 énoncés pris en dehors des énoncés de la base d'exemples, et qu'on a demandé au système de les démontrer, il a su le faire pour 1 251 d'entre

eux. Mais pour l'instant, le système n'a pas découvert de théorèmes nouveaux.

CALCULER DES PRIMITIVES

Un autre exemple tout récent d'utilisation de l'apprentissage profond concerne le calcul des primitives en analyse et la résolution d'équations différentielles. Certaines méthodes utilisées par les mathématiciens, par exemple l'intégration par parties, ou le changement de variable, sont programmées pour qu'un système réussisse seul des calculs d'intégrales. Beaucoup de travaux ont été ainsi menés conduisant à des programmes de plus en plus complexes et efficaces. En reprenant le problème avec des méthodes d'apprentissage et des réseaux de neurones, Guillaume Lample et François Charton, de Facebook, ont mis au point une méthode différente, fondée sur la présentation d'exemples à un réseau de neurones soigneusement configuré pour apprendre sur ce type de problèmes symboliques.

Les exemples proposés au système étaient de trois types: (1) des paires $[f, F]$, où F est une primitive de f , provenant des programmes de calcul fondés sur l'algorithme de Risch ou une de ses variantes; (2) des paires provenant de dérivation qui, elle, est facile et maîtrisée depuis longtemps, contrairement au calcul de primitives: on dérive F , ce qui donne f , d'où la paire $[f, F]$; (3) des paires exploitant la méthode d'intégration par parties.

Les performances du système obtenu égalent et parfois dépassent celle des systèmes classiques comme Mathematica et Matlab. Cela montre de nouveau que l'association de méthodes purement symboliques (dans la phase d'apprentissage) et de méthodes neuronales fait progresser la solution de problèmes symboliques.

L'HUMAIN RESTE INÉGALÉ

Ainsi, pour certaines tâches spécialisées, les programmes égalent ou battent les humains, mais ces méthodes ont toujours des champs de réussite étroits. Même si, indubitablement, la recherche mathématique en tire une aide, les systèmes conçus aujourd'hui se bloquent et cessent de progresser.

Il est formidable d'avoir développé des systèmes informatiques qui formulent d'hypothétiques relations entre les paramètres des graphes, qui mènent des calculs arithmétiques et en tirent des formules de séries nouvelles, qui effectuent des calculs de primitives ou proposent quelques concepts inattendus par combinaison.

Cependant, tous atteignent vite leurs limites. Au contraire, les mathématiciens bouillonnent d'idées nouvelles que les ordinateurs aident parfois à maîtriser, mais en restant toujours de simples esclaves calculateurs sans véritable créativité. L'ordinateur authentiquement mathématicien n'est pas encore là, on attend sa venue! ■

BIBLIOGRAPHIE

An environment for machine learning of higher-order theorem proving, *Proc. of the 36th International Conference on Machine Learning*, 2019.

G. Lample et F. Charton. **Deep learning for symbolic mathematics**, prépublication arXiv:1912.01412, 2019.

C. E. Larson et N. Van Cleemput, **Automated conjecturing I : Fajtlowicz's Dalmatian heuristic revisited**, *Artificial Intelligence*, vol. 231, pp. 17-38, 2016.

D. B. Lenat et P. J. Durlach, **Reinforcing math knowledge by immersing students in a simulated learning-by-teaching experience**, *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, vol. 24, pp. 216-250, 2014.

C. E. Larson, **A survey of research in automated mathematical conjecture-making**, *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol. 69, pp. 297-316, 2005.

S. Colton, **Automated Theory Formation in Pure Mathematics**, Springer, 2002.

S. Colton, **Refactorable numbers – a machine invention**, *Journal of Integer Sequences*, vol. 2., article 99.1.2, 1999.

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

LA MER... QU'ON VOIT MONTER

Comment se représenter la hausse du niveau des mers?
Deux artistes finlandais ont une solution: des lignes de LED.

Les études se succèdent et les prévisions sont à chaque fois plus alarmantes. Parmi les dernières en date, en octobre 2019, Scott Kulp et Benjamin Strauss, de l'organisation Climate Central, à Princeton, aux États-Unis, montrent que 300 millions de personnes seront exposées aux inondations côtières en 2050; c'est trois fois plus qu'on ne l'imaginait jusque-là. Un mois plus tôt, le Giec dénonçait dans un rapport l'accélération du rythme moyen global de la montée des eaux: depuis 2006, il

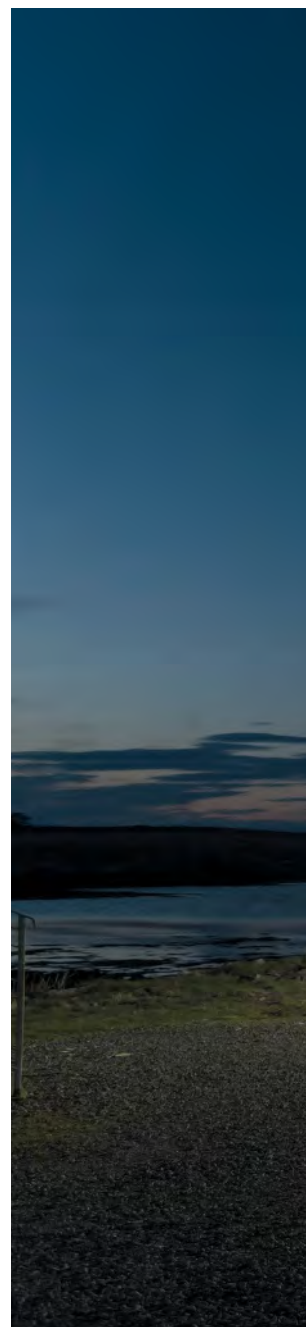
est de 3,6 millimètres par an. Les chiffres se multiplient, mais restent néanmoins abstraits, et même semblent dérisoires, tant il est difficile de se représenter à quoi ils correspondent. Le travail des artistes finlandais Timo Aho et Pekka Niittyvirta peut nous éclairer.

Dans le cadre de l'exposition «Champs Libres» dédiée à la transition écologique, au Maif Social Club, à Paris, ils présentent *Lines* (57° 59' N, 7° 16' W). Ils ont décidé de montrer de façon concrète, et poétique, la réalité de l'élévation du niveau marin en investissant le pourtour du centre des arts Taigh Chearsabhagh, dans le village de Lochmaddy, sur l'île de North Uist, dans l'archipel écossais des Hébrides extérieures. Pourquoi là? L'endroit est apparu «particulièrement pertinent, précise Timo Aho, car il ne peut pas se développer en raison justement de la montée des eaux, mais aussi des tempêtes».

Cette maison de Lochmaddy, en Écosse, ne sera pas épargnée par la hausse du niveau marin, que visualisent des ampoules lumineuses.

L'installation des deux Finlandais consiste en des lignes de LED de basse énergie reliées à des capteurs de marée. Quand elle monte, les ampoules s'illuminent et, en soulignant les interactions des humains et de la nature, figurent sur la base des données du Giec (le pire scénario) le possible futur niveau des eaux dans la campagne et sur les murs des différents bâtiments. Pas de doute, le paysage sera radicalement transformé et la vie fortement perturbée, la plupart des maisons étant exposées aux inondations. Les risques à venir deviennent palpables et saisissants.

De fait, rappellent les deux artistes, «l'art a la capacité de faire passer des idées





complexes, des concepts et des données scientifiques quand on est à court de mots». Et le destin annoncé des deltas densément peuplés d'Asie (Bangladesh, Vietnam...) et des mégaloïles d'Afrique, comme Lagos, Lomé ou Alexandrie, semble soudain moins lointain. D'ailleurs, n'oublions pas qu'en France, Nantes, Bordeaux, Marseille et bien d'autres villes sont tout autant menacées.

Timo Aho et Pekka Niittyvirta ont d'ailleurs récidivé en adaptant leur installation dans un autre endroit tout aussi exposé à la montée des eaux, et nettement moins retiré que Lochmaddy: Miami Beach, aux États-Unis. C'est

qu'aucune région du monde ne sera épargnée: les experts n'excluent pas une élévation du niveau des mers de 2 mètres d'ici à la fin du siècle!

Outre *Lines* (57° 59' N, 7° 16' W), «Champs Libres» expose de nombreuses œuvres qui sont autant de moyens d'expérimenter l'extrême fragilité du vivant et de la planète, mais aussi de penser de nouvelles façons d'agir et de vivre. Par exemple, la Brésilienne Janaina Mello Landini témoigne des interconnexions du vivant et de l'environnement avec *Ciclotrama 126*, une œuvre en cordes ramifiées et organisées selon une structure hiérarchisée, presque fractale,

évoquant les formes des branches d'arbres, des réseaux de veines ou de bronches pulmonaires et... des deltas fluviaux. On y revient, avant qu'ils ne disparaissent sous les eaux. ■

«Champs Libres», jusqu'au 18 juillet 2020.
Maif Social Club, 37 rue de Turenne, 75004 Paris.
<http://bit.ly/MSC-CL>



L'auteur a publié:
**Pollock, Turner, Van Gogh,
Vermeer et la science...**
(Belin, 2018)

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

LES PETITS BATEAUX DE MARANGONI

Si la surface d'un liquide présente des différences de composition chimique ou de température, des écoulements peuvent y apparaître – par l'effet Marangoni.

P our échapper à leurs prédateurs, les *Microvelia*, petites punaises de taille millimétrique qui marchent à la surface de l'eau, sont capables d'accélérer quasi instantanément pour atteindre une vitesse de près de 20 centimètres par seconde. Et cette propulsion n'est pas due à leurs pattes, mais à un phénomène physicochimique, l'« effet Marangoni ». Étudié vers 1865 par le physicien italien Carlo Marangoni, cet effet est aussi à l'origine des « larmes » observées dans un verre de vin ou de boisson suffisamment alcoolisée.

Le bateau à savon, expérience bien connue des écoliers, est une autre illustration flagrante de la propulsion par effet Marangoni. Découpons, dans un morceau de carton plastifié (donc non perméable), la forme grossière d'un bateau avec une proue pointue et une poupe dans laquelle nous pratiquons une échancrure (voir l'illustration et l'encadré ci-contre). Posons cet objet sur l'eau calme d'une cuvette ou d'une baignoire, puis versons avec un cure-dent ou une pipette une goutte de savon liquide dans l'échancrure: le bateau se

met à avancer et poursuit son voyage durant plusieurs secondes!

Pour comprendre ce qui se passe, il faut considérer la tension superficielle de l'eau. À cause des forces intermoléculaires qui assurent la cohésion de l'eau liquide, la surface de l'eau se comporte comme une sorte de trampoline: tout se passe comme si elle constituait un film élastique, extensible et tendu.

ACTEUR PRINCIPAL: LA TENSION SUPERFICIELLE

Lorsqu'un objet est posé sur l'eau, ce film exerce sur lui une force tout le long de la ligne de contact entre l'objet et la surface. Habituellement, le liquide est homogène et alors la somme des forces exercées tout le long du contour s'annule dans le plan horizontal: l'objet reste immobile s'il l'était initialement.

Tout change lorsque l'on dépose localement une goutte de savon. Le savon contient des molécules dites « tensioactives », qui ont une « tête » hydrophile et une « queue » hydrophobe: la tête tend à être au contact de l'eau, la queue tend à s'en écarter. Déposée sur l'eau, la goutte de savon s'étale et forme à la surface une

L'effet Marangoni est responsable des larmes de vin et de la propulsion d'un petit bateau en carton à l'arrière duquel on dépose du savon liquide.

mince couche moléculaire qui en modifie les propriétés. En particulier, cette couche réduit considérablement la tension superficielle, qui peut passer d'environ 70 millinewtons par mètre pour l'eau pure à 25 pour l'eau savonneuse.

Qu'est-ce que cela implique pour le bateau de carton? À l'avant de celui-ci, l'eau est pure et sa tension superficielle tire l'objet. Pour un bateau supposé carré et large de 4 centimètres, la force exercée est d'environ 3 millinewtons. À l'arrière, en revanche, la tension superficielle est

