



En Alaska,
les mouettes tridactyles
(*Rissa tridactyla*) choisissent
leur partenaire à l'odeur.

l'oiseau avec des bouchons, ou si on anesthésie sa muqueuse olfactive, il se retrouve désorienté et n'arrive pas à regagner son gîte. Chez des espèces apparentées, le puffin cendré atlantique et le puffin de Scopoli, Francesco Bonadonna, Anna Gagliardo, de l'université de Pise, ou encore Oliver Padget, à l'université d'Oxford, et leurs collègues ont mis en évidence un phénomène encore plus étonnant : grands migrateurs, ces puffins sont à même de retrouver leur nid à des centaines de kilomètres de distance, mais, rendus temporairement anosmiques, ils perdent cette capacité et tendent à s'égarer.

Ainsi, chez certaines espèces aviennes, les stimuli olfactifs contribuent à l'élaboration de cartes cognitives sophistiquées – localisées dans l'hippocampe – rendant possibles des comportements complexes d'orientation.

LA CARTE OLFACTIVE DU PIGEON VOYAGEUR

Mais les résultats les plus inattendus concernent sans doute le rôle possible du sens olfactif dans l'orientation du pigeon voyageur. L'on sait depuis longtemps que les repères visuels, la position du soleil ou les étoiles constituent des indices importants qui contribuent à ce que le pigeon retrouve à coup sûr le chemin du pigeonier. Cela dit, à eux seuls, ils sont encore insuffisants pour expliquer l'assimilation par l'oiseau de trajets souvent très complexes. La découverte, à partir des années 1980, de cristaux de magnétite, présents dans la partie supérieure du bec et dans l'oreille interne, puis celle, ultérieure, du caractère « magnétosensible » du cryptochrome, un pigment rétinien, ont permis d'appréhender que la détection du champ magnétique terrestre intervenait dans ce processus. Et surtout, des travaux italiens et allemands ont clairement fait ressortir l'importance de l'olfaction dans l'aptitude du pigeon à s'orienter. Celui-ci est capable de reconnaître

spécifiquement le bouquet olfactif propre à son gîte, et sans doute de constituer, grâce à certaines régions corticales spécialisées et l'hippocampe, une « carte olfactive » de son voyage : cette dernière serait alimentée en informations par des stimuli olfactifs tout comme les « cartes mentales » plus classiques le sont par des stimuli visuels chez les oiseaux et les mammifères... si bien qu'au-delà de 50 kilomètres de distance du pigeonier, des individus dont on a sectionné les nerfs olfactifs semblent dans l'incapacité de revenir à leur point de départ. De plus, dans le processus d'orientation, la modalité olfactive paraît latéralisée de façon significative : la majorité des individus retrouve moins aisément le bon chemin si l'on obture leur narine droite – ce qui implique un traitement des odeurs par l'hémisphère cérébral gauche.

Ainsi, avec l'étude de l'olfaction s'est ouvert un champ de recherche ornithologique entièrement nouveau, longtemps demeuré *terra incognita*. La génétique moléculaire est encore venue conforter les résultats issus d'approches plus classiques, mettant en lumière la proportion importante des gènes codant les récepteurs olfactifs fonctionnels chez les oiseaux, nettement supérieure à celle relevée dans l'espèce humaine. Il en va de même pour l'imagerie cérébrale.

Cependant, l'histoire de la controverse montre que bien avant l'émergence des techniques sophistiquées actuelles, des méthodes efficaces permettant la démonstration de l'olfaction avienne étaient à la disposition des investigateurs. Mais dans l'esprit des chercheurs aussi, les préjugés peuvent avoir la vie dure ! Remontant, semble-t-il, à la fin du XVIII^e siècle, l'idée selon laquelle la vision et l'audition performantes de beaucoup d'oiseaux s'étaient développées au prix de l'atrophie de l'odorat a persisté durablement. Qui plus est, jusque dans les années 1980, le cerveau avien était tenu sur le plan de l'évolution comme « archaïque » et « viscéral », gérant surtout des pulsions primaires et des automatismes comportementaux. Voilà qui ne prédisposait guère à mettre en lumière le rôle de la perception olfactive dans des processus cognitifs complexes chez l'oiseau ! En réalité, l'on sait aujourd'hui que bien que structurellement différent, le cortex avien comporte des régions qui équivalent au néocortex des mammifères. L'exploration du riche univers perceptif et cognitif des oiseaux ne fait donc que commencer. ■

BIBLIOGRAPHIE

B. Grison, **Les Portes de la perception animale**, Delachaux & Niestlé, à paraître en octobre 2020.

O. Padget et al., **Anosmia impairs homing orientation but not foraging behaviour in free-ranging shearwaters**, *Scientific Reports*, vol. 7, article 9668, 2017.

S. Leclaire et al., **Preen secretions encode information on MHC similarity in certain sex-dyads in a monogamous seabird**, *Scientific Reports*, vol. 4, article 6920, 2014.

T. Birkhead, **L'Oiseau et ses sens**, Buchet/Chastel, 2014.

N. Marples et T. Roper, **Effects of novel colour and smell on the response of naive chicks towards food and water**, *Animal Behaviour*, vol. 51(6), pp. 1417-1424, 1996.

J.-J. Audubon, **Scènes de la nature dans les États-Unis et le nord de l'Amérique**, vol. 1, Sauton, 1868.

R

ENDEZ-VOUS

P.82 Logique & calcul
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

À LA RECHERCHE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

Les nombres irrationnels, qu'ils soient algébriques ou transcendants, se laissent approcher plus ou moins difficilement par des suites de nombres rationnels. La mesure de cette difficulté permet de les classer.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)

Les mots en mathématiques sont parfois arbitraires et difficiles à justifier: par exemple, pourquoi parle-t-on d'un «corps» de nombres en français alors qu'en anglais on emploie le mot *field* qui veut dire «champ»? Sans doute parce qu'il n'y a aucune raison précise de parler de corps ou de champ! Le sarcastique Bertrand Russell disait que «les mathématiques sont une science où l'on ne sait pas de quoi on parle, ni si ce qu'on dit est vrai» et, pour David Hilbert, si l'on raisonne correctement en géométrie, «on doit toujours pouvoir remplacer “points”, “droites”, “plans” par “tables”, “chaises”, “verres de bière”»...

Le nom «transcendance» et l'adjectif «transcendant», utilisés en théorie des nombres, font rêver et évoquent l'idée de choses profondes, à la limite de nos capacités de compréhension et de raisonnement. Proposés par Leibniz, ces mots sont d'un usage cette fois justifié, tant les problèmes posés par ces notions sont délicats et les progrès pour les maîtriser sont longs et seulement partiels. Voyons cela.

DES NOMBRES NON ALGÈBRIQUES

Nous nous limiterons aux nombres réels (2 , $-1/3$, $\sqrt{2}$, π , etc.), mais beaucoup des résultats que nous allons mentionner s'étendent aux nombres complexes comme le célèbre i dont le carré est -1 .

La plupart des ensembles de nombres réels s'emboîtent: il y a les entiers naturels $0, 1, 2, 3$, etc., contenus dans l'ensemble des entiers relatifs $0, 1, -1, 2, -2$, etc., eux-mêmes sous-ensemble de l'ensemble des nombres rationnels (les fractions) $0, 1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 2/3, -2/3$, etc. Plus grand et contenant tous les

précédents, il y a les nombres algébriques, c'est-à-dire les solutions d'une équation polynomiale à coefficients entiers: $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique car il est l'une des deux solutions de l'équation $X^2 - 2 = 0$. On dit que $\sqrt{2}$ est racine du polynôme $P(X) = X^2 - 2$.

Parmi les nombres algébriques, il y en a qu'on peut exprimer avec des radicaux (des racines carrées, des racines cubiques, etc.) mais il y en a, d'après le théorème d'Abel, qu'on ne peut pas exprimer avec des radicaux. C'est le cas, par exemple, de l'unique racine réelle du polynôme $X^5 - 3X - 1$.

Les nombres réels qui ne sont pas algébriques sont dénommés «nombres transcendants». L'idée derrière l'adjectif est simple: de tels nombres échappent à toute définition formulée en termes d'entiers et de polynômes, il doit donc être difficile d'en trouver et il est délicat de les comprendre!

IL EN EXISTE UNE INFINITÉ

La première question les concernant est bien évidemment: existe-t-il des nombres transcendants?

Une démonstration complète et n'exigeant aucun calcul (voir l'encadré 3) établit qu'il existe des nombres transcendants. Elle exploite le procédé diagonal découvert en 1891 par Georg Cantor, et permet de construire explicitement des nombres transcendants.

L'idée de la démonstration est simple. On prouve que l'infini des nombres algébriques est le même que celui des nombres entiers (infini qualifié de dénombrable). Sachant que l'infini des nombres réels est plus grand que celui des nombres entiers, on en déduit que la grande majorité des nombres réels sont transcendants et qu'il y en a une infinité.

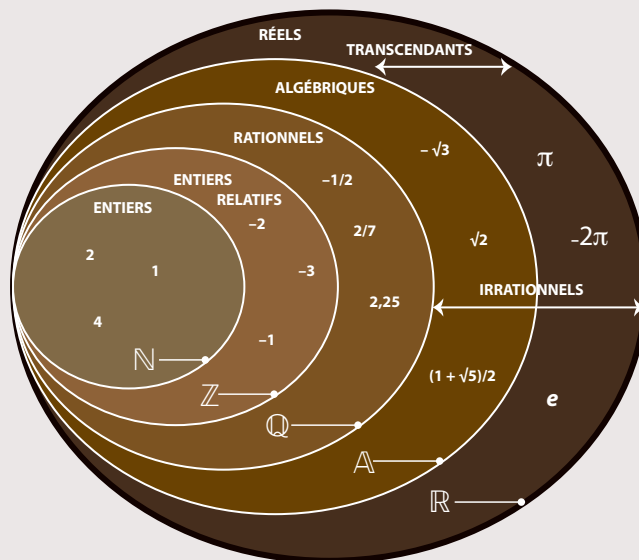


Jean-Paul Delahaye a notamment publié: **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

LES SOUS-ENSEMBLES DES NOMBRES RÉELS

1

Les entiers naturels ($\mathbb{N}$) sont les nombres les plus simples : 0, 1, 2, ... En y ajoutant les entiers négatifs, on obtient l'ensemble des « entiers relatifs » ($\mathbb{Z}$). En formant les quotients de deux tels entiers, on obtient les nombres rationnels ($\mathbb{Q}$). Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, mais c'est une solution de l'équation $X^2 - 2 = 0$. On introduit donc tous les nombres racines d'équations polynomiales à coefficients entiers, ce qui donne l'ensemble des nombres algébriques ($\mathbb{A}$). Certains nombres réels, dont π et e , ne sont pas algébriques. Par définition, ils constituent l'ensemble des nombres transcendants.



2

DÉCOUVREURS DE NOMBRES TRANSCENDANTS

Petit à petit, les mathématiciens ont perfectionné leurs méthodes, ce qui leur a permis de prouver l'existence de nouveaux nombres transcendants. Le Français Joseph Liouville (1809-1881) (a) fut le premier ; il proposa le nombre : $L = 1/10 + 1/10^{21} + 1/10^{31} + 1/10^{41} + \dots$ Puis Charles Hermite (1822-1901) (b), un Français lui aussi, démontra la transcendance de e . Ensuite,

l'Allemand Ferdinand von Lindemann (1852-1939) (c) régla le cas de π . Au xx^e siècle, le mathématicien d'origine allemande Kurt Mahler (1903-1988) (d) et, plus récemment, Yann Bugeaud (né en 1971) (e) et Boris Adamczewski (né en 1977) (f) en France ont contribué à élargir sensiblement notre compréhension des nombres transcendants.

Le procédé diagonal de Cantor utilisé pour construire un nombre transcendant a un défaut : aucune formule simple ne donne les décimales des nombres obtenus. À moins d'écrire un programme prenant les polynômes à coefficient entiers un à un, calculant leurs racines et appliquant le procédé diagonal, ce qui est possible mais exténuant, on ne sait pas très bien à quoi ressemblent les nombres transcendants obtenus. Heureusement, au xix^e siècle, le mathématicien Joseph Liouville a proposé une méthode plus directe qui produit des nombres transcendants moins énigmatiques ; ils furent d'ailleurs les premiers nombres transcendants découverts.

UN THÉORÈME DE LIOUVILLE

Justifier la méthode de Liouville exige un raisonnement et des calculs plus compliqués que la méthode de Cantor. L'idée de Liouville est cependant très intéressante. Elle est fondée sur une propriété étrange montrant que, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, les nombres algébriques irrationnels ne peuvent pas être finement approchés par des nombres rationnels, >



3

PREUVE DE L'EXISTENCE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

La démonstration de l'existence de nombres transcendants peut se faire sans calcul. Ce n'est pas la première démonstration de l'existence de ces nombres, mais c'est la plus facile à comprendre.

Étape 1. On attribue à chaque polynôme à coefficients entiers un poids en faisant la somme des valeurs absolues de ses coefficients et de son degré. Par exemple, le polynôme $3X^5 - 7X + 1$ a le poids $3 + 7 + 1 + 5 = 16$. Pour un entier n fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes à coefficients entiers de poids n . En effet, pour avoir le poids n , le polynôme doit avoir un degré inférieur ou égal à n , et ses coefficients entiers (au plus $n + 1$) doivent avoir une valeur absolue inférieure ou égale à n . Cela permet de classer tous les polynômes à coefficients entiers dans une liste unique :

- On prend d'abord les polynômes de poids 1. Il n'y a que 1 et -1 (aucun n'a de racine).
- On prend ensuite les polynômes de poids 2. Il y en a quatre : 2 ; -2 ; X ; $-X$ (le polynôme X a pour racine 0, de même que le polynôme $-X$).
- On prend ensuite les polynômes de poids 3. Il y en a dix : 3 ; -3 ; $2X$; $-2X$;

$X + 1$; $-X + 1$; $X - 1$; $-X - 1$; X^2 ; $-X^2$. Et ainsi de suite. À chaque niveau, on ordonne les polynômes. Notons $P_0(X)$, $P_1(X)$, $P_2(X)$, $P_3(X)$, ... cette liste de tous les polynômes à coefficients entiers. Les nombres réels solutions d'une équation $P_i(X) = 0$ sont en nombre fini car un polynôme de degré n possède au plus n racines. Classons ces solutions en une liste (certains nombres apparaîtront plusieurs fois, mais c'est sans importance) en prenant par ordre croissant les solutions réelles de l'équation $P_0(X) = 0$ (s'il y en a), puis celles de l'équation $P_1(X) = 0$ (s'il y en a), etc. On obtient ainsi la liste $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ de tous les nombres réels solutions des équations de la forme $P(X) = 0$ où $P(X)$ est un polynôme à coefficients entiers, autrement dit on obtient la liste de tous les nombres algébriques. Cette partie du raisonnement démontre que les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable, c'est-à-dire associable, dans une correspondance terme à terme, à l'ensemble des entiers naturels 0, 1, 2,

Étape 2. Considérons maintenant le nombre réel $r = 0, c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$ dont le premier chiffre décimal après la virgule, c_0 , est choisi différent du premier chiffre décimal après la virgule de s_0 (on convient

Ou encore : un nombre rationnel de dénominateur q ne peut pas s'approcher du nombre algébrique irrationnel x à moins de C/q^n , où n est le degré du polynôme dont x est racine et C une constante qui dépend de x .

Dès lors, en prenant le nombre dont le développement décimal est :

$L = 0,11000100000000000000000010000\dots$ (les 1 en position $1!$, $2!$, $3!$, $4!$, ...), soit

$L = 1/10 + 1/10^{2!} + 1/10^{3!} + 1/10^{4!} + \dots$, on est certain que L est un nombre transcendant, car les nombres rationnels obtenus en s'arrêtant juste derrière le k -ième 1 donne L avec une erreur inférieure à $2/10^{(k+1)!}$, ce qui est incompatible avec le théorème de Liouville.

Une insatisfaction persiste cependant : est-ce que certains nombres connus, et non pas des nombres artificiels comme ceux donnés par Cantor et Liouville, sont transcendants ?

DES NOMBRES TRANSCENDANTS À LA PELLE

Une multitude de résultats ont progressivement permis de répondre oui.

Le premier est dû à Charles Hermite, qui démontra en 1873 que la base e des logarithmes naturels, $e = 2,71828\dots = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \dots$, est transcendant. Il fut suivi en 1882 par celui de Ferdinand von Lindemann, qui démontra que le nombre π est transcendant. Ce dernier résultat a pour conséquence que le problème

par exemple de prendre 1 si ce premier chiffre diffère de 1, et 2 sinon), dont le deuxième chiffre décimal après la virgule, c_1 , est choisi différent du deuxième chiffre après la virgule de s_1 (même principe de choix), etc. Pour éviter certaines complications dues aux égalités du genre $1 = 0,9999\dots$, il est important de choisir c_i toujours différent de 0 et de 9. Le nombre r qu'on vient de définir explicitement et dont les chiffres pourraient être produits un à un par un programme est différent, par construction, de tout nombre algébrique. C'est donc un nombre transcendant. Cette partie du raisonnement est l'application du procédé de « diagonalisation » de Cantor à l'ensemble des nombres algébriques.

Il existe une infinité non dénombrable de nombres transcendants. Voir sur ce sujet l'article de Robert Gray, « Georg Cantor and transcendental numbers » (*The American Mathematical Monthly*, vol. 101(9), pp. 819-832, 1994) qui explique comment les auteurs ont programmé la création d'un nombre transcendant par la méthode de Cantor et où ils démontrent que tout nombre transcendant est le résultat d'une telle diagonalisation à partir des nombres algébriques.

4

LES NOMBRES AUTOMATIQUES

de la quadrature du cercle est impossible à résoudre. Posé par Anaxagore vers 430 avant notre ère, ce problème consiste à partir d'un cercle C dessiné sur un plan et, en n'utilisant qu'une règle (non graduée) et un compas, à dessiner un carré dont l'aire soit égale à l'aire du disque délimité par C . On avait démontré auparavant que si une telle construction existe, alors cela implique que π est algébrique. Par conséquent, si π est transcendant, c'est que la construction à la règle et au compas est impossible. Inutile d'en poursuivre la recherche !

Depuis ces résultats sur e et π , une multitude d'autres nombres transcendants précis ont été identifiés.

Si x est un nombre algébrique non nul, alors e^x est transcendant (von Lindemann, 1882). En passant par les nombres complexes, on en déduit que $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$ sont transcendants quand x est algébrique non nul.

Si x est un nombre algébrique différent de 0 et de 1 et si y est un nombre algébrique irrationnel, alors le nombre x^y est transcendant (Alexandre Gelfond et Theodor Schneider, 1934). En particulier $2^{\sqrt{2}}$, $3^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{3}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, etc. sont des nombres transcendants. On en tire, à nouveau en passant par les nombres complexes, que e^{π} est transcendant.

Le nombre de Champernowne, à savoir 0,12345678910111213..., obtenu en écrivant les uns derrière les autres la suite des entiers naturels en base 10 est transcendant (Kurt Mahler, 1937). De même, le nombre obtenu en mettant les uns derrière les autres les carrés des nombres entiers, 0,14916253649..., est transcendant.

La constante de Prouhet-Thue-Morse est le nombre dont le développement en base 2 est 0,0110100110010110... Le n -ième chiffre après la virgule (on commence à compter à 0) est un 0 si l'écriture en binaire de n comporte un nombre pair de 1, et c'est un 1 sinon. La suite des chiffres après la virgule se définit aussi de la manière suivante: on part de 0, on y ajoute le complément 1, ce qui donne 01, on y ajoute encore le complément 10, ce qui donne 0110, puis 01101001, puis 0110100110010110, etc. La constante de Prouhet-Thue-Morse est un nombre transcendant (Kurt Mahler, 1929).

Plus généralement, les nombres réels dont le développement en une base de numération b est une suite automatique (c'est-à-dire produite par un automate à mémoire finie, voir l'encadré 4) non périodique à partir d'un certain rang sont transcendants (Boris Adamczewski, Yann Bugeaud, 2007).

Les nombres non calculables par algorithme, dont Alan Turing a montré l'existence en 1936, sont des nombres transcendants car les nombres algébriques sont calculables. La constante Ω de Gregory Chaitin, qui est non calculable, est un nombre transcendant, ainsi que le nombre obtenu en ne gardant du développement

Soupçonné par John Loxton et Alf van der Poorten en 1982, et finalement démontré par les mathématiciens français Boris Adamczewski et Yann Bugeaud en 2007, un résultat remarquable indique que les nombres dont les chiffres en une base de numération donnée b sont b -automatiques sont soit des nombres rationnels, soit des nombres transcendants. Un nombre $0, c_0 c_1 c_2 \dots$ écrit en base b est b -automatique s'il existe un procédé de calcul ne nécessitant qu'une mémoire finie pour calculer c_n (voir deux exemples plus bas).

Le résultat signifie que si un nombre a un développement simple à calculer, alors soit il est lui-même simple, car quotient de deux entiers (c'est un rationnel), soit c'est un nombre transcendant. En conséquence, et c'est assez inattendu, les nombres algébriques irrationnels comme $\sqrt{2}$ ont nécessairement des développements compliqués à calculer.

Voici deux exemples de nombres automatiques, l'un est un nombre rationnel, l'autre est un nombre transcendant. Le nombre rationnel $2/3$, qui s'écrit 0,10101010... en base 2, est un nombre automatique, car pour connaître le n -ième chiffre de son développement binaire (on compte à partir de 0), il suffit

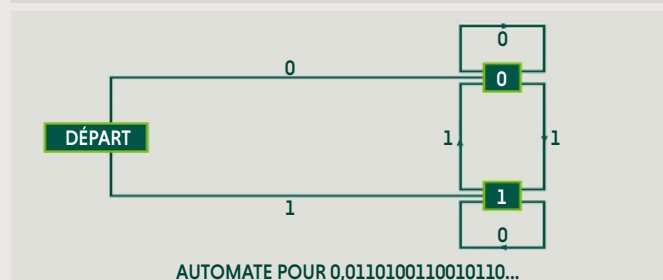
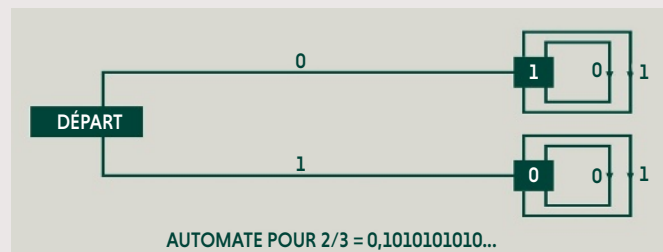
d'utiliser le premier automate représenté ci-dessous.

On se place sur le graphe de l'automate en position de départ, puis on lit un à un, de droite à gauche, les chiffres binaires de n en suivant la flèche correspondante au chiffre lu. Le nom du nœud auquel on arrive quand on a fini de lire n indique le chiffre numéro n du développement de $2/3$.

Exemple : pour connaître le chiffre c_n de $2/3 = 0, c_0 c_1 \dots$, on écrit 6 en base 2, soit 110, on se place au nœud « Départ », puis on suit les flèches marquées 0, 1, 1. Cela nous conduit au nœud [1] : le chiffre c_6 de $2/3$ écrit en base 2 est un 1.

Le nombre de Thue-Morse 0,0110100110010110... où le n -ième chiffre après la virgule (on commence à compter à 0) est un 0 si l'écriture binaire de n comporte un nombre pair de 1, et est un 1 sinon. Ce nombre est défini par l'automate figuré en bas.

En informatique, on envisage des modèles de calculs plus complexes que les automates finis servant à définir les nombres automatiques. Pour certains de ces modèles, des généralisations du résultat mentionné ici ont été obtenues en 2020 par les chercheurs français Boris Adamczewski, Julien Cassaigne et Marion Le Gonidec (voir la bibliographie).



> décimal de Ω que les chiffres de rang pair, ou que les chiffres de rang multiple de 3, etc.

La fraction continue (voir l'encadré 5) dont la suite des coefficients est la suite de Prouhet-Thue-Morse, avec des 1 et des 2 à la place des 0 et des 1, est un nombre transcendant (Martine Queffélec, 1998), de même que toute fraction continue dont la suite des coefficients n'est pas périodique à partir d'un certain rang et qui est automatique (Yann Bugeaud, 2013), ou qui commence une infinité de fois par un palindrome (Boris Adamczewski et Yann Bugeaud, 2007) (voir un exemple dans l'encadré 6).

MIEUX QUE LE THÉORÈME DE LIOUVILLE

Revenons au résultat de Liouville sur la difficulté d'approcher les nombres algébriques. Il a été amélioré en 1955 par le mathématicien britannique Klaus Roth (mort en 2015). Le nouveau résultat, qui a donc attendu plus d'un siècle, constitue un progrès fantastique, qui a valu à Roth une médaille Fields en 1958 :

Si un nombre irrationnel x peut être approché une infinité de fois par des fractions p/q à mieux que $1/q^{2+a}$ près pour un a positif, alors x n'est pas algébrique.

Le théorème de Liouville disait qu'on ne peut pas approcher un nombre algébrique irrationnel avec des rationnels de la forme p/q avec une précision de l'ordre de $1/q^n$, si n est le degré du polynôme dont x est racine. On sait désormais que c'est vrai en remplaçant n par $2+a$, même si a est un nombre positif très petit.

Formulons encore autrement le résultat de Roth : en utilisant des rationnels p/q , on ne peut approcher à l'infini un nombre algébrique irrationnel x (par exemple $\sqrt{2}$) à mieux que $1/q^2$ près ; si l'on peut faire mieux, c'est-à-dire

en remplaçant le 2 par $2+a$ avec a positif ($1/q^{2+a}$ est alors plus petit que $1/q^2$), c'est qu'on a affaire à un nombre transcendant.

Décidément, les nombres algébriques sont très difficilement approchables !

Du côté des transcendants, on sait parfois les approcher mieux qu'avec une précision de $1/q^2$ et, dans le cas du nombre de Liouville L , on sait même qu'on peut les approcher avec une précision de $1/q^n$ pour tout entier $n \geq 1$. Est-ce la même chose pour tous les nombres transcendants ? La réponse est non : pour cette capacité à approcher les transcendants, il existe une variété infinie de situations.

Pour traiter cette question, nous utiliserons l'exposant de q dans de la fraction $1/q^n$ comme moyen de classer les nombres transcendants. Cela conduit à la définition de la « mesure d'irrationalité » d'un nombre. C'est un peu compliqué, mais juste après la définition, nous verrons des exemples qui permettront facilement de la comprendre.

MESURE D'IRRATIONALITÉ D'UN NOMBRE RÉEL

Soit x un nombre réel. On considère l'ensemble des nombres y tels qu'il est impossible d'approcher x par une infinité de rationnels p/q avec une précision de $1/q^y$.

Si un y est dans cet ensemble, les y' supérieurs à y sont aussi dans cet ensemble. Cet ensemble est donc un intervalle de la forme $[z, +\infty)$ (tous les y tels que $y \geq z$) ou de la forme $]z, +\infty)$ (tous les y tels que $y > z$). Ce z situé à l'extrémité basse de l'intervalle infini est la « mesure d'irrationalité de x », que l'on notera $ir(x)$. Si on peut approcher x avec une précision de $1/q^y$ pour tout nombre y , on dira que $ir(x) = +\infty$.

Avec cette notion, le théorème de Roth s'exprime simplement : les nombres qui ont

LES FRACTIONS CONTINUES

5

À côté des développements en base de numération b comme les développements décimaux ($b = 10$) ou binaires ($b = 2$), il existe un type moins connu mais très important de développement d'un nombre réel : les développements en fraction continue. Un nombre x étant donné, on utilise la notation $x = [a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ pour l'expression :

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

où les a_i sont des nombres entiers. Tout nombre réel positif s'écrit sous cette forme. Les nombres rationnels

sont les nombres réels dont le développement en fraction continue est fini (les a_i sont nuls à partir d'un certain rang n). Le nombre d'or, $(1+\sqrt{5})/2$, a le plus simple des développements infinis : $(1+\sqrt{5})/2 = [1 ; 1, 1, 1, \dots]$.

Lorsque le développement en fraction continue est assez simple, le nombre correspondant x se révèle transcendant. Voici deux très beaux résultats généraux récents là-dessus.

– Si la suite a_i est automatique (voir l'encadré 4) et n'est pas périodique à partir d'un certain n , alors x est transcendant (Bugeaud, 2013). Le nombre dont le développement en fraction continue est la suite de Prouhet-Thue-Morse $[0 ; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots]$ est donc transcendant.

– Si les débuts de la suite a_i sont une infinité de fois un palindrome, alors x est transcendant (Adamczewski et Bugeaud, 2007). Exemple : $x = [0 ; 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 4, 4, 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 2, 1, 5, 5, \dots]$.

La mesure d'irrationalité $ir(x)$ d'un nombre réel x (voir le texte principal) est liée à la suite a_i des entiers de son développement en fraction continue. C'est ce qu'indique un résultat classique : $ir(x)$ est la limite de la suite extraite de la suite $(2 + \ln(q_{n+1})/\ln(q_n))$ qui converge vers la plus grande valeur possible, où q_n est le dénominateur du nombre rationnel p_n/q_n obtenu en calculant la fraction continue finie $[a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_n]$.

6

LE NOMBRE OMÉGA DE GREGORY CHAITIN

L'incomplétude se manifeste avec une force inouïe dans le nombre Ω de Gregory Chaitin. Par définition, Ω est la probabilité qu'un programme tiré au hasard s'arrête au bout d'un nombre fini de pas. La difficulté à le calculer provient de la fameuse indécidabilité de l'arrêt d'un programme découverte par Alan Turing en 1936.

Le nombre Ω est un objet mathématique comme $\log(2)$ ou π . Étant une probabilité, Ω est compris entre 0 et 1 et possède donc un développement binaire infini $\Omega = 0, a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Voici quelques propriétés de ce nombre.

- Le nombre Ω est non calculable : aucun algorithme ne peut en égrainer les chiffres un à un. Il est

donc transcendant, puisque tous les nombres algébriques sont calculables (à partir du polynôme dont le nombre algébrique x est racine, on sait comment calculer autant de chiffres qu'on veut de x).

- Le nombre obtenu en ne retenant que les chiffres de rang pair de Ω , à savoir $\Omega_{\text{pair}} = 0, a_0 a_2 a_4 \dots a_{2n} \dots$, est transcendant. C'est vrai aussi du nombre obtenu en ne retenant que les chiffres de rang impair, ou de rang $f(0), f(1), f(2), \dots$ donné par toute fonction f calculable par algorithme et croissante ($f(0) < f(1) < f(2) < \dots$).
- La suite des chiffres de Ω est normale au sens de Borel : la fréquence avec laquelle on rencontre la séquence 00 (ou 01, ou 10, ou 11) est $1/4$, et plus



Dessin de la médaille conçue par Stephen Wolfram et Hector Zenil, offerte à Gregory Chaitin pour son 60^e anniversaire.

généralement la fréquence avec laquelle on rencontre une séquence déterminée de 0 et de 1 de longueur k est $1/2^k$.

- Le nombre Ω est aléatoire : il est impossible à compresser.

une mesure d'irrationalité strictement supérieure à 2 sont transcendants.

Ce qu'on a vu pour le nombre de Liouville signifie donc que le nombre transcendant de Liouville L a une mesure d'irrationalité $+\infty$.

Il n'est pas absurde de considérer que plus la mesure d'irrationalité d'un nombre est grande, plus ce nombre est «fortement transcendant». La mesure d'irrationalité est donc un moyen de classer les nombres par «gravité» de la transcendance!

SUR LA LIGNE DE FRONT DE LA RECHERCHE

Que sait-on aujourd'hui de cette gravité de la transcendance et quels sont les résultats connus concernant e , π , la constante de Prouhet-Thue-Morse, le nombre de Champernowne, etc.?

Voici quelques réponses obtenues plus ou moins récemment.

- Il existe une infinité de nombres transcendants ayant $+\infty$ comme mesure d'irrationalité.

- La base e des logarithmes naturels a pour mesure d'irrationalité 2, et c'est le cas de tous les nombres irrationnels sauf pour un ensemble de mesure nulle.

- Le nombre de Champernowne $0,123456789101112\dots$ a pour mesure d'irrationalité 10. Plus généralement, le nombre de Champernowne en base de numération b a pour mesure d'irrationalité b (Kurt Mahler, 1937). Tout entier supérieur ou égal à 2 est donc la mesure d'irrationalité d'un nombre x au moins. La variété des valeurs possibles pour la mesure d'irrationalité est bien plus grande encore, comme l'affirme le résultat récent suivant: pour tout nombre réel $r \geq 2$, il existe une infinité non dénombrable de

nombres transcendants dont la mesure d'irrationalité est r (Vojtěch Jarník, 1931).

- Les nombres automatiques irrationnels ont une mesure d'irrationalité qui est finie (Boris Adamczewski, Julien Cassaigne, 2006).

- Il existe des nombres normaux, c'est-à-dire contenant toutes les séquences finies s de chiffres avec une fréquence limite égale à $1/10^n$ où n est la longueur de s , ayant une mesure d'irrationalité $+\infty$ (Yann Bugeaud, 2002). Ce résultat répond à la question: est-ce que pour avoir une mesure d'irrationalité infinie, il est nécessaire de posséder de longues séquences de 0 comme L ? La réponse est donc non.

Voici quelques résultats connus concernant la mesure d'irrationalité:

π : 7,10320533 (Doron Zeilberger et Wadim Zudilin, 2020);

π^2 : 5,441243 (Georges Rhin et Carlo Viola, 1996);

$\ln(2)$: 3,57455391 (Raffaele Marcovecchio, 2009);

$\ln(3)$: 5,125 (Vladislav Salikhov, 2007);

$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + \dots$: 5,513891 (Georges Rhin et Carlo Viola, 2001);

Constante de Prouhet-Thue-Morse: 2 (Yann Bugeaud, 2011).

À chaque fois, le nombre indiqué n'est pas la mesure précise d'irrationalité, mais seulement un majorant. Il est vraisemblable que ces résultats pourront être améliorés. Le résultat sur π a été obtenu par une méthode intéressante: les chercheurs se sont inspirés d'une preuve proposée par Vladislav Salikhov qui donnait 7,6063... et, en utilisant un logiciel de calcul formel, ont exploité le plus finement possible ce qu'on pouvait en tirer, ce qui a amélioré le résultat.

Le travail à faire pour répondre aux plus élémentaires questions concernant la gravité de la transcendance des nombres ne fait que commencer! ■

BIBLIOGRAPHIE

B. Adamczewski et al., **On the computational complexity of algebraic numbers**, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 373, pp. 3085-3115, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1601.02771.pdf>).

D. Zeilberger et W. Zudilin, **The irrationality measure of π is at most 7.103205334137...**, 2020 (<https://arxiv.org/pdf/1912.06345.pdf>).

J.-P. Delahaye, **Le fascinant nombre π** , Belin, 2018.

Y. Bugeaud, **Distribution Modulo One and Diophantine Approximation**, Cambridge University Press, 2012.

B. Adamczewski et T. Rivoal, **Irrationality measures for some automatic real numbers**, *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 147, pp. 659-678, 2009 (<https://bit.ly/2VaQzSg>).

Y. Bugeaud, **Diophantine approximation and Cantor sets**, *Mathematische Annalen*, vol. 341(3), pp. 677-684, 2008.

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

COMMENT VOLENT LES INSECTES

Les petites bêtes pratiquent le vol battu, mais pas comme les oiseaux. Et le type de mouvement décrit par leurs ailes dépend de la taille de l'insecte.

Le printemps s'achève et les jardins sont animés par les ballets aériens des insectes butineurs, mais aussi parfois par les manœuvres surnoises d'importuns moustiques. Observer le vol des insectes suscite toujours de l'étonnement: décollage en vol arrière, atterrissage au dos d'une feuille, vol stationnaire ou voltiges en tous genres...

Ces performances aériennes inégales sont longtemps restées inexplicables, en raison de la petite taille des insectes (et de leur refus de coopérer!). Il a fallu le développement des techniques d'imagerie et de calcul pour que l'on comprenne peu à peu comment ils volent. Surprise: de multiples mécanismes contribuent à leur sustentation et, pour un même type d'insectes, les mouvements de leurs ailes varient selon la taille de l'espèce.

Pour voler, les insectes ont besoin d'une force qui compense leur poids et d'une poussée pour avancer. Comme ils

ne disposent ni d'hélices ni de réacteurs, ils créent ces forces en battant leurs ailes d'avant en arrière: ils s'apparentent davantage à un hélicoptère, dont les pales (les ailes) sont mobiles, qu'à un avion.

CALCULER COMME POUR UNE AILE D'AVION?

On peut tenter de calculer la force aérodynamique agissant sur une aile d'insecte comme on le ferait pour une aile d'avion légèrement inclinée par rapport à l'horizontale. Elle est proportionnelle au carré de la vitesse (ici de l'aile en mouvement dans l'air immobile) et se décompose en une force opposée à la vitesse, la traînée, et une autre perpendiculaire, la portance.

Pour que la portance compense le poids, il faut que l'angle entre le plan de l'aile et la direction du déplacement soit toujours dans le même sens, ce qui suppose que l'aile modifie son inclinaison lorsque son déplacement change de sens (de l'avant vers l'arrière, ou inversement):

Les mouvements d'ailes que font pour voler les insectes relativement grands, comme les mouches butineuses, diffèrent de ceux des insectes moins visibles, tels que les petits moustiques.

ces rotations rapides de l'aile, que l'on constate effectivement chez les insectes, ont pour noms «supination» et «pronation» (voir l'encadré page ci-contre).

Par ailleurs, comme le poids croît comme le volume de l'insecte, et la portance comme la surface des ailes, on peut estimer que la vitesse de translation des ailes augmente comme la racine carrée de la taille caractéristique de l'insecte, donc que la fréquence de battement, qui reflète le rapport vitesse/taille, varie comme l'inverse de cette racine carrée.

Ce résultat va dans le bon sens: à l'oreille, on distingue nettement les petits insectes, comme les moustiques ou

