



Comment les sciences peuvent-elles nous aider à appréhender l'après-crise ?

Comment vivre avec le numérique dans le respect des règles éthiques primordiales pour notre liberté ?

« **Et après ?** », une collection de livres numériques pour penser le monde d'après



R

ENDEZ-VOUS

P.82 Logique & calcul
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

LE SECRET D'ARSÈNE LUPIN : LES SUPER-PERMUTATIONS

Comment représenter toutes les permutations possibles d'un ensemble par une courte séquence ? Ce jeu de tassement n'intéresse pas seulement les mathématiciens : il peut aussi aider les étourdis, les cambrioleurs et les voyageurs de commerce.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Certains problèmes simples passionnent les amateurs de mathématiques et les conduisent aux sommets de la recherche. Le problème dont nous allons parler dans cette rubrique est de cette catégorie. Plus étrange et plus rare, une avancée dans les recherches menées sur les superpermutations provient d'un contributeur qui a souhaité rester anonyme ! De surcroît, les mathématiques des superpermutations peuvent intéresser les cambrioleurs et les étourdis qui ont oublié leur code.

Les permutations d'un ensemble sont les différentes façons d'en classer les éléments. Il y a par exemple 6 permutations possibles d'un ensemble de trois éléments $\{1, 2, 3\}$ qui sont : 123, 132, 213, 231, 312 et 321.

Dans le cas d'un ensemble ayant n éléments, il y a $n! = n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ permutations possibles. Le nombre $n!$ (« factorielle n ») croît très rapidement avec n :

$1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$; $8! = 40320$; $9! = 362880$; $10! = 3628800$; $11! = 39916800$; $12! = 479001600$; $13! = 6227020800$; $14! = 87178291200$; etc.

Le problème des superpermutations pour n consiste à proposer une suite d'entiers compris entre 1 et n , aussi courte que possible, dans laquelle on trouve chaque permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ comme séquence d'éléments côte à côte.

Pour $n=2$, la suite 121 de longueur 3 est une superpermutation, car on y trouve 12 et 21 qui sont les deux seules permutations

de $\{1, 2\}$. En échangeant le rôle de 1 et de 2, on obtient une seconde superpermutation de longueur 3 : 212. Cette possibilité d'obtenir d'autres superpermutations de même longueur dès qu'on en a une fonctionne bien sûr pour tout n , et chaque superpermutation trouvée pour n en donnera $n!$ de même longueur, puisqu'il y a $n!$ façons de permuter les symboles de $\{1, 2, \dots, n\}$.

PREMIÈRES SUPERPERMUTATIONS

Pour $n=3$, la séquence 123121321 est une superpermutation ; on y trouve bien les 6 permutations 123, 132, 213, 231, 312, 321, dans l'ordre 123, 231, 312, 213, 132, 321.

Pour la construire, on a pris les 6 permutations et on les a mises les unes derrière les autres en choisissant un ordre permettant de les fusionner au mieux. Derrière 123, on a choisi de mettre 231, ce qui, en les fusionnant, donne 1231 et fait donc gagner 2 symboles par rapport à une juxtaposition sans fusion.

La superpermutation proposée pour $n=3$ a pour longueur 9. Est-il possible d'avoir plus court ? La réponse est non. Pour s'en persuader, il faut faire un petit raisonnement (voir l'encadré 1).

Pour des n supérieurs à 3, on peut procéder par tâtonnement ou en utilisant des programmes qui explorent tous les cas possibles. On va voir qu'on rencontre vite les limites de capacité de calcul de nos ordinateurs, car la croissance exponentielle de $n!$ est vraiment très rapide. Il existe cependant des raisonnements généraux donnant des informations sur

les superpermutations recherchées qui simplifient le traitement des cas particuliers.

Voici quelques-uns de ces résultats sur la longueur des superpermutations. Ils ont été trouvés à la fois par des chercheurs mathématiciens et par des amateurs passionnés par le problème – en particulier Greg Egan, auteur australien de science-fiction, à qui l'on doit le roman *Permutation City* et qui maintient à jour un excellent site internet sur le sujet (voir l'encadré 5).

TROUVER, POUR N DONNÉ, CELLE QUI EST LA PLUS COURTE

La plus courte superpermutation pour n comporte au moins $n! + n - 1$ symboles. En effet, chaque symbole d'une superpermutation ne peut être le début que d'une permutation au plus: il faut donc au moins $n!$ symboles dans une superpermutation. Cependant les $n - 1$ derniers symboles ne peuvent pas être le début d'une permutation, car il n'y a pas assez de symboles qui suivent: une superpermutation pour n comporte donc au moins $n! + n - 1$ symboles.

Un raisonnement plus fin proposé en 1993 par les mathématiciens Daniel Ashlock et Jenett Tillotson montre que la longueur minimale est au mieux $n! + (n - 1)! + (n - 2)!$. Un autre raisonnement, plus récent et plus efficace, donne le minorant: $n! + (n - 1)! + (n - 2)! + (n - 3)!$.

Ce résultat est le meilleur connu aujourd'hui pour la minoration de la longueur d'une superpermutation. Il a une histoire un peu étrange.

En 2011, sur le forum internet 4chan, des internautes échangeaient sur le problème de savoir comment il faut s'y prendre pour diffuser aussi rapidement que possible les épisodes d'une série télévisée qui en comporte n , de manière à ce qu'on puisse les voir dans tous les ordres possibles selon le moment où on commence à regarder la diffusion de la série. Le problème est exactement celui de trouver la plus courte superpermutation de n éléments.

Un internaute anonyme affirma qu'il était impossible de réussir en moins de $n! + (n - 1)! + (n - 2)! + (n - 3)!$ diffusions d'épisodes. Il donnait des arguments imparfaits, mais relativement précis tout de même.

Quelques années plus tard, en 2018, un groupe de mathématiciens composé de Robin Houston, Jay Pantone et Vince Vatter, préoccupés par le problème des superpermutations, a repris les idées du contributeur anonyme, les a rédigées de manière précise et complète, et les a publiées. Très honnête, le groupe de mathématiciens publia le résultat (<https://oeis.org/A180632/a180632.pdf>) sous leurs trois noms précédés d'un nom fictif, *Anonymous 4chan Poster*, pour l'amateur génial et toujours inconnu.

1

SUPERPERMUTATIONS ET OUVERTURE DE COFFRE-FORT



Une superpermutation d'ordre $n = 3$ est une suite de nombres pris parmi 1, 2 et 3 où l'on trouve toutes les permutations des trois nombres 1, 2, 3, c'est-à-dire 123, 132, 213, 231, 312, 321. Bien sûr, en mettant les permutations les unes derrière les autres, on a ce qu'on cherche avec une suite de longueur 18 : 123132213231312321. On peut cependant faire mieux : la suite 123121321 convient. La longueur 9 est donc possible pour $n = 3$.

Démontrons qu'on ne peut pas faire mieux que 9. Supposons qu'une suite $n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7 n_8$ de 8 nombres convienne pour $n = 3$, c'est-à-dire que les 6 suites $n_1 n_2 n_3$, $n_2 n_3 n_4$, $n_3 n_4 n_5$, $n_4 n_5 n_6$, $n_5 n_6 n_7$, $n_6 n_7 n_8$ sont les 6 permutations de $\{1, 2, 3\}$, ce qui signifie, en particulier, qu'elles sont toutes différentes.

Pour que $n_1 n_2 n_3$ soit une permutation, il faut que n_1 soit différent de n_2 et différent de n_3 . Pour que $n_2 n_3 n_4$ soit une permutation, il faut que n_4 soit différent de n_2 et de n_3 . Donc nécessairement $n_1 = n_4$.

De même, en considérant $n_2 n_3 n_4$ et $n_3 n_4 n_5$, on conclut que $n_2 = n_5$; et en considérant $n_3 n_4 n_5$ et $n_4 n_5 n_6$, on déduit que $n_3 = n_6$. Par conséquent, on aurait $n_1 n_2 n_3 = n_4 n_5 n_6$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que les 6 suites $n_1 n_2 n_3$, $n_2 n_3 n_4$, $n_3 n_4 n_5$, $n_4 n_5 n_6$, $n_5 n_6 n_7$, et $n_6 n_7 n_8$ sont toutes différentes. Conclusion : il n'existe pas de superpermutation de longueur 8 pour $n = 3$.

Pour $n = 4$, on trouve 1234123142 31243121342132413214321, de longueur 33, dont on montre aussi (c'est un peu plus compliqué, bien sûr !) qu'elle est la plus courte

superpermutation possible pour $n = 4$.

Une application possible des superpermutations est l'ouverture d'un coffre-fort fermé dont on a perdu la combinaison. Pour l'ouvrir, il faut positionner le curseur du coffre en lui faisant occuper 4 positions différentes successives qui constituent le code d'ouverture, par exemple 6 puis 2 puis 1 puis 4. On a oublié les 4 chiffres du code d'ouverture. On pourrait essayer les unes après les autres toutes les combinaisons en bougeant le curseur 4 fois pour chacune. On a $10 \times 9 \times 8 \times 7 / (4 \times 3 \times 2) = 210$ sous-ensembles de 4 chiffres, et pour chacun de ces sous-ensembles, il y a $4! = 24$ ordres possibles. Au total, on a donc $210 \times 24 \times 4 = 20\,160$ mouvements du curseur à faire par la méthode d'énumération naturelle.

En utilisant la superpermutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ de longueur 33, on peut cependant économiser beaucoup de mouvements. Pour chaque ensemble de 4 chiffres $\{a, b, c, d\}$, on copie la superpermutation de $\{1, 2, 3, 4\}$ en remplaçant 1 par a , 2 par b , 3 par c , 4 par d , et on utilise la superpermutation de $\{a, b, c, d\}$ pour essayer toutes les combinaisons. On fera ainsi 33 mouvements au lieu de $4 \times 24 = 96$. Au total, on ne fera (au maximum) que $33 \times 210 = 6\,930$ mouvements du curseur au lieu de 20 160, ce qui correspond à un gain de plus de 65 %. En faisant attention à l'ordre dans lequel on considère les sous-ensembles de 4 chiffres, on peut d'ailleurs gagner encore quelques mouvements.

> Connaître un minorant ne garantit pas qu'on trouvera une superpermutation de la longueur indiquée; c'est seulement l'affirmation qu'il est impossible de faire plus court. Après avoir cherché les minorants de la taille de la meilleure superpermutation, il est naturel de s'intéresser aux majorants en essayant cette fois de trouver les plus petits possible. Si l'on réussit à faire se rejoindre les minorants et les majorants, le problème sera résolu: on saura quelle est la longueur des plus courtes superpermutations pour tout n .

QUELLE EST LA LONGUEUR MAXIMALE D'UNE SUPERPERMUTATION?

Il est tout d'abord évident que pour tout entier n , il existe une superpermutation de longueur $n \times n!$, puisqu'en mettant les unes derrière les autres sans aucune fusion les $n!$ permutations qui ont chacune n symboles, on obtient une superpermutation de longueur $n \times n!$.

La superpermutation de longueur $n \times n!$ n'est vraiment pas astucieuse, car elle n'exploite aucune possibilité de fusion. Il faut tenter de faire mieux. C'est ce que propose le très beau résultat: «Pour tout entier positif n , il existe une superpermutation de longueur $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$.»

Le gain par rapport à $n \times n!$ est d'autant plus important que n est grand. Un petit calcul montre en effet que pour $n=3$ le gain est 9, pour $n=4$ le gain est 63, pour $n=5$ le gain est 447, pour $n=6$ le gain est 3447, pour $n=7$ le gain est 35280, pour $n=8$ le gain est 322560.

La démonstration que $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ symboles suffisent toujours pour une superpermutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ résulte d'une construction qui permet de nombreuses fusions, et d'un magnifique raisonnement proposé en 2013 par Nathaniel Johnston, de l'université Mount Allison, à Sackville, au Canada. La construction exploite l'idée que d'une superpermutation pour n à la suivante pour $n+1$, on peut réexploiter les fusions qu'on a su faire et donc que les nouvelles fusions qu'on introduit à chaque étape et les fusions réussies à l'étape précédente se cumulent et permettent des économies de plus en plus importantes en nombre de symboles (voir l'encadré 3).

Pour récapituler, désignons par $S(n)$ la longueur de la plus courte superpermutation pour n . Pour $n=1, 2, 3$, le problème est réglé: $S(1)=1$ (évident); $S(2)=3$ (évident); $S(3)=9$ (on l'a expliqué plus haut et dans l'encadré 1).

Compte tenu du meilleur minorant et du meilleur majorant connus, nous savons que pour

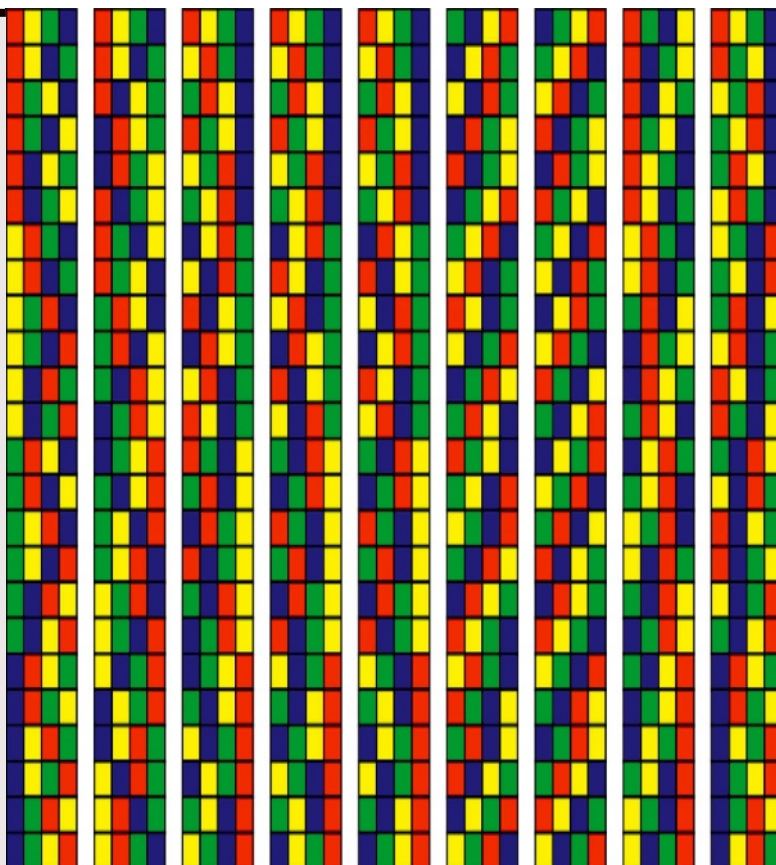
2

PERMUTATIONS ET FACTORIELLES

Les diverses façons de ranger un ensemble de n éléments, ou permutations de cet ensemble, sont au nombre de $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ (factorielle n): on choisit l'élément à mettre en tête (n possibilités); on choisit l'élément à placer en deuxième ($n-1$ possibilités); etc. La suite des factorielles croît très rapidement:

0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	1 307 674 368 000
16	20 922 789 888 000
17	355 687 428 096 000
18	6 402 373 705 728 000

Il existe ainsi $4! = 24$ permutations de 4 éléments, et donc 24 façons de ranger ces permutations. Ci-contre, on a pris 4 couleurs et on a dessiné 9 des 24 façons d'ordonner les permutations de ces couleurs.



tout $n \geq 4$, on a :

$$n! + (n-1)! + (n-2)! + \dots + 2! + 1 \leq S(n) \leq$$

$$n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1.$$

Pour $n=4$, cela signifie : $24 + 6 + 2 + 1 = 33 \leq S(4) \leq 24 + 6 + 2 + 1 = 33$. La superpermutation obtenue par la méthode décrite dans l'encadré 2 est : 123412314231243121342132413214321. Sa longueur est 33, c'est donc le meilleur résultat possible.

Un calcul par programme donne des informations plus précises. Il permet de savoir que les seules autres superpermutations possibles sont les $4! = 24$ que l'on déduit de celle donnée ci-dessus par permutation des symboles et qu'il n'y en a pas d'autres. À titre d'exemple donnons l'une des superpermutations obtenue par permutation des symboles de la superpermutation donnée. Si on change 1 en 2, 2 en 3, 3 en 4 et 4 en 1, on obtient la superpermutation :

234123421342314232413243124321432.

Pendant près de vingt ans, l'hypothèse naturelle que la formule $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ donnait la longueur minimale d'une superpermutation pour n a été admise, jusqu'à ce que l'étude des cas $n=5$ et $n=6$ change la situation.

Pour $n=5$, la méthode de l'encadré 3 fournit une superpermutation de longueur $5! + 4! + 3! + 2! + 1 = 153$. Faire un programme assez efficace qui, pour $n=5$, essaie de trouver mieux sans rien oublier, ou montre qu'on ne peut pas faire mieux que 153, n'est pas facile. Pourtant, en mars 2014, Ben Chaffin a réussi, et son astucieux programme d'exploration a découvert 8 superpermutations de longueur 153 dont aucune ne se ramène à une autre par changement des noms des symboles. Chacune des 8 superpermutations donne $120 = 5!$ superpermutations par les changements des noms des symboles. Le programme montre aussi que 153 est impossible à améliorer. Voici l'une des huit superpermutations trouvées : 1234512341523412534123541231452314235142315423124531243512431524312543121345213425134215342135421324513241532413524132541321453214352143251432154321 (voir www.njohnston.ca/superperm5.txt et www.njohnston.ca/2014/08/all-minimal-superpermutations-on-five-symbols-have-been-found/).

Ce résultat établit que le minorant découvert grâce à l'internaute anonyme n'est pas assez précis : pour $n=5$, il n'existe pas de superpermutations correspondant au minorant annoncé. Mais ce résultat montre aussi que la méthode de l'encadré 3 ne donne pas tout ce qui est possible, et suggère qu'il est possible d'améliorer le majorant $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$.

Ce qui se passe pour $n=6$ prouve effectivement que le majorant connu n'est pas assez précis, lui non plus. La formule $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ cesse d'être valable pour $S(6)$. Robin Houston s'en est aperçu en comprenant que les algorithmes de résolution du problème du voyageur de commerce

3

SUPERPERMUTATION DE LONGUEUR $N! + (N-1)! + \dots + 2! + 1$

Pour tout entier positif n , il existe une superpermutation dont la longueur est : $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$. Voyons la superbe démonstration de ce résultat proposé en 2013 par Nathaniel Johnston.

Pour $n=3$, on a une superpermutation de longueur 9, et on a bien $9 = 3! + 2! + 1$. De même, pour $n=4$, on a une superpermutation de longueur 33 = $4! + 3! + 2! + 1$. Le résultat est donc vrai pour $n=3$ et $n=4$.

Raisonnons par récurrence : on suppose vrai le résultat pour n et on cherche à prouver qu'il est alors vrai pour $n+1$. Pour suivre le raisonnement, on détaillera les étapes pour passer d'une superpermutation correspondant à $n=3$ à une superpermutation correspondant à $n=4$, mais la méthode est générale et permet de passer d'une superpermutation de longueur $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$, pour n , à une superpermutation de longueur $(n+1)! + n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$, pour $n+1$.

Prenons donc une superpermutation pour $n=3$ de longueur $1 + 2! + 3! = 123121321$. Faisons apparaître toutes les permutations de $\{1, 2, 3\}$ dans l'ordre où elles se présentent : 123, 231, 312, 213, 132, 321 (nous n'avons pas fait apparaître 121, car ce n'est pas une permutation).

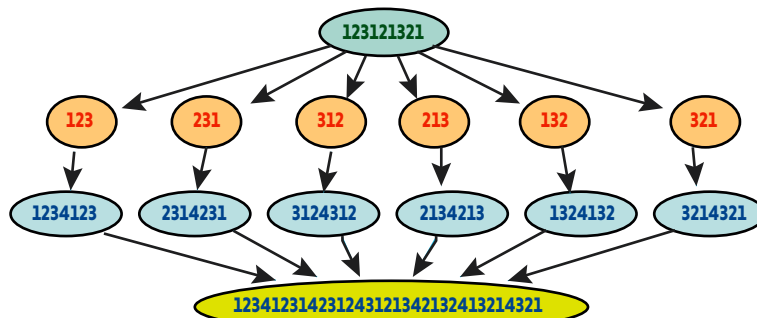
On accole ces permutations en fusionnant ce qui peut l'être : par exemple, on accole 123 et 231 qui donne 1231, car on exploite que 123 finit par 23 et que 231 commence par 23. Après toutes les fusions, nous obtenons une suite 123121321 de longueur $9 = 3! + 2! + 1!$ comme prévu.

Maintenant, partant de la liste des permutations 123, 231, 312, 213, 132, 321, nous en construisons une nouvelle en doublant chaque

permutation et en plaçant un 4 entre les permutations identiques : 123 4 123, 231 4 231, 312 4 312, 213 4 213, 132 4 132, 321 4 321. Fusionnons maintenant le plus possible les termes de cette suite. Pour $n=4$, nous obtenons 123412314231243121342132413214321. Ce que nous gagnons grâce aux fusions est égal à ce que nous avons gagné (9 chiffres) en fusionnant 123, 231, 312, 213, 132, 321 pour obtenir 123121321. Par hypothèse de récurrence, dans le cas général, cela fait gagner $n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)$ symboles.

Dans le cas général (et pour $n+1$), la suite que nous obtenons par ces fusions a pour longueur : $2n \times n! + n! - [n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)]$. Le premier terme, $2n \times n!$, provient de ce qu'on a copié 2 fois les $n!$ permutations, qui sont chacune de longueur n ; le second terme provient de la copie n fois la valeur $n+1$ (le 4 dans notre exemple) ; et le terme soustrait provient de ce qu'on gagne grâce aux fusions. L'expression obtenue se simplifie : $2n \times n! + n! - [n \times n! - (1 + 2! + \dots + n!)] = n \times n! + n! + (1 + 2! + \dots + n!)$ $= n! (n+1) + (1 + 2! + \dots + n!)$ $= 1 + 2! + \dots + n! + (n+1)!$. La suite de nombres de notre construction a donc pour longueur $1 + 2! + \dots + n! + (n+1)!$.

Montrons maintenant qu'elle contient bien toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Toute permutation P de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ est de la forme $A(n+1)B$ où A et B sont des suites utilisant au total n nombres tous différents pris dans $\{1, 2, \dots, n\}$ et donc telles que AB est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Cela signifie que P se trouve quelque part dans ce que nous avons construit, car quelque part nous avons la séquence $AB(n+1)AB$. CQFD.



4

LE PROBLÈME DU
VOYAGEUR DE COMMERCE

Un certain nombre de villes sont données, et on connaît le réseau des routes reliant les villes. Quand il existe une route entre deux villes, on connaît la longueur de la route qui les relie. Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver un plan de tournée pour visiter toutes les villes, une seule fois chacune, en faisant le trajet le plus court possible.

Savoir si, pour une longueur L donnée, il existe une solution donnant un plan de voyage de moins de L kilomètres est un problème de la catégorie NP-complet. Cela signifie qu'on ne sait pas le résoudre rapidement (en temps polynomial), et que si on le savait, on saurait résoudre rapidement (en temps polynomial) tous les problèmes d'une large classe de problèmes (la classe NP), ce qui semble improbable. Dit de façon plus simple : on ne sait pas résoudre rapidement le problème général du voyageur de commerce et il est improbable qu'on le sache un jour ; il faut se contenter de méthodes lentes, ou de méthodes qui ne garantissent pas le meilleur résultat possible.

Il existe de telles méthodes ainsi que des programmes qui donnent des résultats assez bons, même si ce ne sont pas les meilleurs possibles. Par exemple, Julien Coupey, qui travaillait sur la mobilité à l'institut Femto-ST de Besançon et qui travaille aujourd'hui pour la start-up Verso, développe un programme qui traite des tournées sur un assez grand nombre de villes. Ainsi, pour un problème concernant 93 villes françaises, son programme propose la solution figurée en haut.

Or résoudre le problème des superpermutations se ramène à un problème de voyageur de commerce. Expliquons l'idée sur un exemple en prenant $n = 3$.

Les permutations de $\{1, 2, 3\}$ sont 123, 132, 213, 231, 312, 321. Une superpermutation est comme un trajet reliant ces permutations. Entre deux permutations, la distance qui les sépare peut être 1, 2 ou 3 :

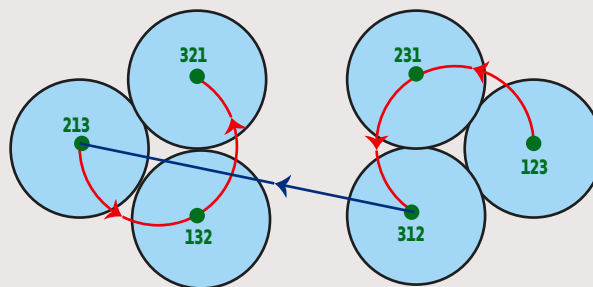
- entre 123 et 231, la distance est 1, car en fusionnant correctement 123 et 231, ce qui donne 1231, on n'allonge 123 que d'un seul symbole ;
- entre 123 et 312, la distance est 2, car en fusionnant les deux permutations, on obtient 12312, qui allonge 123 de deux symboles ;
- entre 123 et 132, la distance est 3, car aucune fusion n'est possible et donc si on veut les deux permutations l'une après l'autre, il faut prendre 123132, qui allonge 123 de trois symboles.

Cette façon de voir les permutations et leurs distances mutuelles définit l'équivalent d'une carte avec des distances. Le problème de trouver une superpermutation devient alors

celui de trouver le plus court plan de tournées pour le voyageur de commerce qui veut visiter toutes les permutations sur cette carte.

Le dessin ci-dessous de Greg Egan représente la carte du voyageur de commerce pour $n = 3$: les « routes » de longueur 1 entre permutations sont dessinées en rouge, celle de longueur 2 (entre 312 et 213) est dessinée en bleu. Les autres « routes » ne sont pas dessinées. La superpermutation la plus courte possible, 123121321, de longueur 9, est représentée par la succession de cinq routes : deux en rouge, une en bleu, deux en rouge.

Le problème du voyageur de commerce est un problème important en mathématiques appliquées, car de nombreux problèmes s'y ramènent. On a développé et perfectionné les méthodes et programmes pour le résoudre. Ces méthodes ont été utilisées pour résoudre le problème des superpermutations et ont conduit à une série de records (voir le texte principal).



> (voir l'encadré 4) s'adaptent au problème, et que, grâce à ceux mis au point par les chercheurs en mathématiques appliquées, on montre qu'il existe une superpermutation de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ qui, au lieu d'avoir la longueur $6! + 5! + 4! + 3! + 2! + 1 = 873$, n'a que 872 symboles. Le résultat est catastrophique pour le majorant théorique connu, car à partir de cette superpermutation pour $n=6$, on peut, en utilisant la méthode de l'encadré 3, en trouver qui battent $n! + (n-1)! + \dots + 2! + 1$ pour tout n supérieur à 6.

Un progrès théorique confirme ce que le calcul par ordinateur a montré. En utilisant une idée de 2013 du mathématicien canadien Aaron William, l'écrivain de science-fiction Greg Egan a en effet proposé une construction du même type que celle indiquée dans l'encadré 3, qui cette fois indique qu'on pourra pour tout $n \geq 6$ avoir une superpermutation dont la longueur ne dépassera pas $n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + (n-3)$.

L'encadrement théorique de $S(n)$ est devenu meilleur : $n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3) \leq S(n) \leq n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + (n-3)$.

Le côté droit et le côté gauche semblent proches. C'est une illusion, car l'écart entre les deux est $(n-3)!$, quantité qui croît très rapidement quand n augmente.

La méthode générale d'Aaron William et Greg Egan pour $n=7$ donne une superpermutation de longueur 5908, ce qui économise 5 symboles par rapport à $5913 = 7! + 6! + 5! + 4! + 3! + 2! + 1$. Pour $n=8$, la méthode donne une longueur de 46205, soit un gain de 28 par rapport à $46233 = 8! + 7! + \dots + 2! + 1$. Pour $n=9$, la méthode donne une longueur de 408966, soit 147 de moins que $409113 = 9! + 8! + \dots + 2! + 1$.

La nouvelle méthode est certainement très bonne, mais ce n'est pas la méthode ultime. En effet, pour $n=7$, un programme de Bogdan Coanda a trouvé une superpermutation de longueur 5907, meilleure que le 5908 de la méthode d'Aaron William et Greg Egan, record encore battu par une superpermutation de longueur 5906 trouvée récemment par un programme cette fois de Robin Houston.

Aujourd'hui, certains pensent qu'on est proche d'une solution définitive pour tout n , mais rien n'est gagné, et pour l'instant on n'a de certitude concernant $S(n)$ que pour $S(1)=1$, $S(2)=3$, $S(3)=9$, $S(4)=33$ et $S(5)=153$.

QUELQUES PROBLÈMES PROCHES

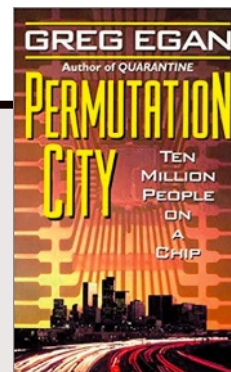
D'autres problèmes se posent ressemblant à celui des superpermutations.

Les suites de De Bruijn, auxquelles nous avons consacré une rubrique (« Un tour de cartes mathémagique », *Pour la Science*, n° 441, juillet 2014), consiste à rechercher une séquence qui contient non pas toutes les permutations, mais toutes les séquences d'une longueur fixée k utilisant n symboles. Par

5

GREG EGAN

Greg Egan, né en 1961, est un auteur de science-fiction canadien, ainsi qu'un programmeur, qui s'intéresse au problème des superpermutations. Il propose un site internet sur le problème : www.gregegan.net/SCIENCE/Superpermutations/Superpermutations.html Il a publié un roman à succès traduit en français : *Permutation City* ou *La Cité des permuteurs*, qui traite des mondes multiples et qui, malgré son titre, ne traite pas de superpermutations !



exemple, la suite de De Bruijn 000001001011001111000110111010101 contient les 32 suites possibles de longueur 5, composées de 0 et de 1. On y trouve donc 00000, 00001, 00010, 00011, ... Dans le problème de De Bruijn, on considère que la suite est refermée sur elle-même et donc qu'une fois arrivée au bout, on repart au début. C'est important, car la suite 10100 n'est obtenue qu'en prenant les trois derniers symboles et les deux premiers.

Le problème de la longueur des suites de De Bruijn est plus simple que celui des superpermutations, puisqu'on sait par exemple démontrer qu'il existe des suites de De Bruijn de longueur 2^k pour tout k dans le cas du problème des suites de 0 et de 1 de longueur k , et que ce résultat est le meilleur possible.

Un problème assez proche encore de celui des superpermutations est étudié par les mathématiciens en considérant la notion de suite extraite. Si on prend la suite 1232132, on y trouve 123, 132, 213, 231, 312, 321, mais cette fois ce n'est vrai qu'en acceptant de prendre les symboles recherchés même s'ils ne sont pas côte à côte (on parle de « suite extraite »). Par exemple, 231 s'obtient en prenant les symboles rouges dans 1232132 et 312 s'obtient en prenant les symboles rouges dans 1232132.

On a montré que le plus petit entier égalant ou dépassant $n^2 - 7n/3 + 19/3$ est toujours une longueur suffisante pour réussir à avoir une suite extraite pour chaque permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ce nombre est cependant un simple majorant et, comme dans le cas des superpermutations, on ne sait pas exactement quelle est, avec certitude, la plus petite longueur suffisante pour n .

Les problèmes de tassement de données sont plus délicats qu'on ne l'avait imaginé ! ■

BIBLIOGRAPHIE

Numberphile, **Superpermutation**, 2020 : www.youtube.com/embed/wJGE4aEWc28?end=476

N. Jonhston, **The Minimal Superpermutation Problem**, 10 avril 2013 : <https://bit.ly/2LfgPQX>

P. Honner, **Unscrambling the hidden secrets of superpermutations**, *Quanta Magazine*, 16 janvier 2019 : <https://bit.ly/2zxRQKz>

Anonymous 4chan Poster et al., **A lower bound on the length of the shortest superpattern**, 25 octobre 2018 : <https://oeis.org/A180632/a180632.pdf>

M. Engen et V. Vatter, **Containing all permutations**, prépublication arXiv :1810.08252, 2018 (<https://arxiv.org/pdf/1810.08252.pdf>).

R. Houston, **Tackling the minimal superpermutation problem**, prépublication arXiv :1408.5108, 2014 (<https://arxiv.org/pdf/1408.5108.pdf>).

LES AUTEURS



JEAN-MICHEL COURTY et ÉDOUARD KIERLIK
professeurs de physique à Sorbonne Université, à Paris

FLUIDIFIER LE TRAFIC... EN COUPANT UNE ROUTE!

Quand plusieurs trajets sont possibles, en bloquer un peut améliorer la circulation sur le reste du réseau. Un paradoxe qui a notamment un analogue mécanique.

En 1990, pour le jour de la Terre, le responsable de la circulation de New York décida de fermer la 42^e rue qui était congestionnée en permanence. De nombreuses voix s'élevèrent contre cette initiative et prédisaient un cauchemar pour la circulation dans les rues alentour. Pourtant, le jour venu, le trafic était plus fluide qu'à l'accoutumée. Et cet exemple n'est pas isolé ! On a identifié de nombreuses situations où fermer une route à la circulation améliore l'état général du trafic. Ce phénomène est connu sous le nom de «paradoxe de Braess», d'après le mathématicien allemand Dieter Braess qui l'a étudié vers 1968 dans le cadre de la théorie des réseaux.

Afin de comprendre comment cela est possible, on peut analyser un système mécanique analogue : une masse suspendue par des ficelles et des ressorts peut remonter lorsqu'on coupe l'une des

ficelles qui la retiennent (voir le dessin et l'encadré ci-contre).

Pour construire chez soi ce système mécanique paradoxal, nous avons simplement besoin d'une masse, de deux élastiques (ou ressorts) identiques et de ficelle. La construction sera facilitée par l'utilisation d'élastiques et de ficelles colorés pour bien distinguer les divers éléments du réseau, ainsi que d'anneaux métalliques pour connecter entre eux les différentes parties. Une canette de soda de 33 centilitres fera office de masse, l'anneau de la languette d'ouverture facilitant son accroche.

DES ÉLASTIQUES OU RESSORTS ET DES BOUTS DE FICELLE

Pour commencer, attachons en partant du haut un élastique vert, puis un court morceau de ficelle noire, un élastique rouge et enfin la masse. Suspendons le tout. Soumis à une tension égale au



En coupant la petite ficelle noire du milieu dans le dispositif de suspension, la canette remonte, contrairement à ce à quoi on pourrait s'attendre.

poids de la canette, les deux élastiques (identiques à part leur couleur) s'allongent alors d'une certaine longueur ΔL . Dans cette configuration, si l'on coupe la ficelle intermédiaire noire, la canette tombe puisqu'elle n'est plus retenue.

Ajoutons alors deux ficelles de sécurité pour la retenir. Nous choisissons comme longueur de chaque ficelle tout juste un peu plus que la somme de la longueur d'un élastique tendu et la longueur de la ficelle intermédiaire noire. La première ficelle, rouge, joint le point d'accroche du dispositif à l'extrémité haute de l'élastique inférieur (rouge). La seconde relie l'extrémité basse de l'élastique supérieur (vert) au point d'accroche avec la canette. La tension dans ces