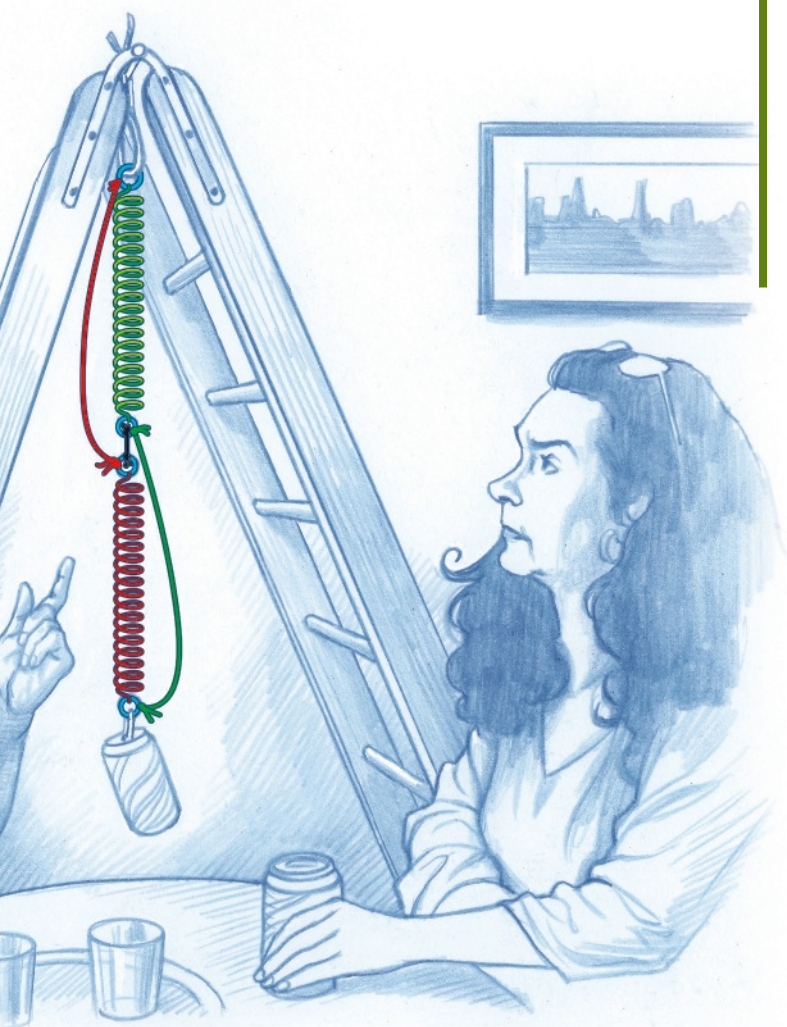
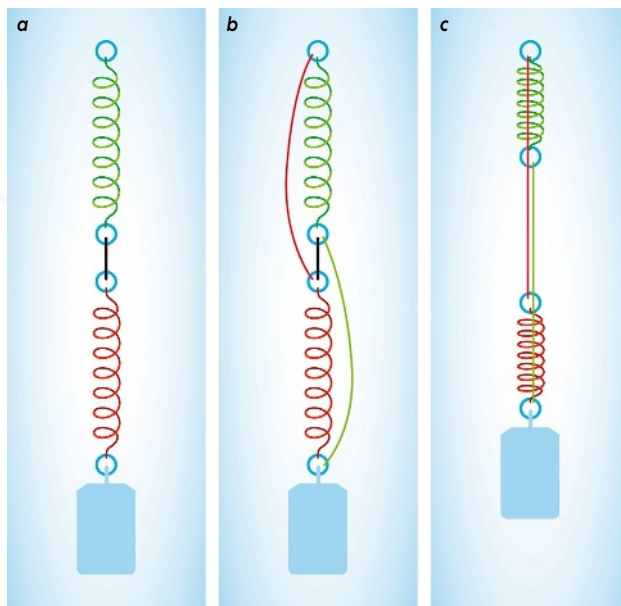




D'UN MONTAGE EN SÉRIE À UN MONTAGE EN PARALLÈLE

Le dispositif mécanique qui illustre le paradoxe de Braess est construit en suspendant d'abord une masse à deux ressorts (ou élastiques) identiques montés en série et reliés l'un à l'autre par un petit morceau de ficelle (a). On accroche ensuite deux ficelles de sécurité comme illustré (b), la longueur de chacune dépassant légèrement la somme de la longueur du ressort allongé et de celle de la ficelle noire. Lorsqu'on coupe la ficelle noire, la masse se retrouve suspendue à deux systèmes ressort + ficelle parallèles (c). Chacun de ces deux systèmes supporte alors la moitié du poids de la masse, et l'allongement des ressorts est donc réduit de moitié : la masse remonte.



ficelles est nulle tant que la ficelle intermédiaire noire est présente.

Que se passe-t-il si l'on coupe cette dernière? On s'attend à ce que la masse descende puisqu'on coupe un lien qui la soutient. Pourtant, non seulement la masse ne tombe pas, mais en plus elle remonte!

Pour comprendre ce comportement contre-intuitif, observons le nouveau système. Le réseau de ficelles et élastiques qui soutient la masse est maintenant formé de deux branches identiques constituées d'une ficelle et d'un élastique. Comme chacune de ces deux branches soutient la moitié du poids de la canette, la tension est la moitié de ce qu'elle était qu'auparavant. Les élastiques sont donc

moins tendus et la canette remonte. En termes de physiciens, on est passé d'une configuration où les ressorts étaient montés «en série» à une configuration où ils sont montés «en parallèle».

REMONTÉE CONTRE-INTUITIVE

De combien la masse remonte-t-elle? Considérons la situation idéale où la longueur de la ficelle noire ainsi que celles des anneaux de connexion sont négligeables. Pour qu'elles ne soient pas tendues, la longueur des ficelles de sécurité doit alors tout juste dépasser la longueur des élastiques tendus.

Sous ces hypothèses, la longueur totale du dispositif initial est égale à deux fois la longueur d'un élastique soutenant

toute la canette. Lorsqu'on a coupé la ficelle intermédiaire, la longueur totale est la somme de la longueur d'une ficelle (presque égale à celle de l'élastique tendu) et d'un élastique soutenant la moitié du poids. Autrement dit, la masse remonte d'une hauteur égale à la moitié de l'allongement initial, soit $\Delta L/2$. Quel est le maximum que l'on puisse obtenir? D'après un théorème général sur ce type de réseau, le raccourcissement ne peut >

Les auteurs ont notamment publié : **En avant la physique!**, une sélection de leurs chroniques (Belin, 2017).



> dépasser le quart de la longueur totale: ce maximum serait atteint ici si la longueur à vide (sans tension) des élastiques était nulle.

Remarquons, en outre, que la canette ne remonte pas systématiquement dans la configuration que nous avons considérée. Pour qu'elle remonte, il faut en effet que la longueur des ficelles de sécurité soit plus longue que celle de l'élastique soutenant la moitié de la charge (sinon, on est en régime parallèle dès la première situation), et plus courte qu'une fois et demie la longueur de l'élastique tendu (sinon, le raccourcissement des élastiques ne compense pas l'allongement qui se produit lorsque la ficelle se tend).

Ce paradoxe se retrouve dans bien des domaines de la physique, par exemple en électricité où résistances et diodes remplacent nos ressorts et ficelles. Mais il y a plus proche de notre quotidien: un réseau routier, dans des villes embouteillées ou sur le trajet des vacances.

BIEN RÉPARTIR LE TRAFIC

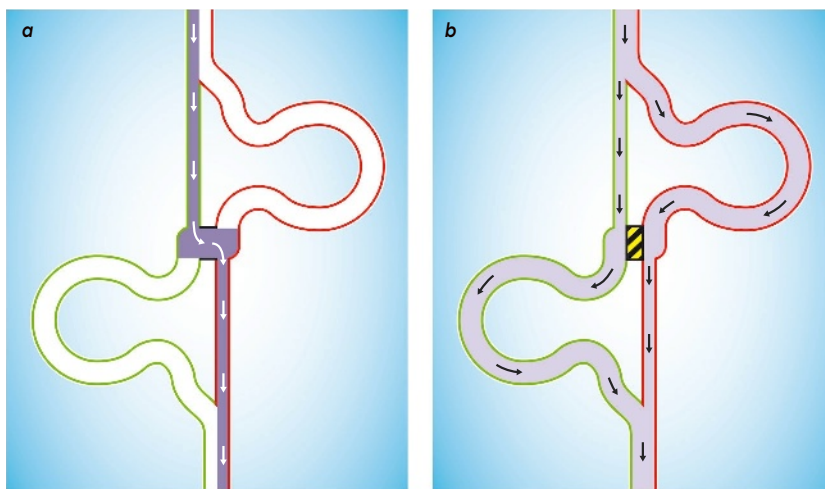
Supposons que, chaque matin, entre 7 heures et 8 heures, environ 1000 véhicules partent d'une ville A pour se rendre à la ville B, et que de chacune de ces deux villes partent une autoroute et une route étroite qui se rejoignent au niveau d'un pont commun (voir l'encadré ci-contre). L'autoroute tolère un fort trafic, mais le chemin est plus long; on suppose que la durée du trajet est de 20 minutes, indépendamment du trafic (tout comme la longueur des ficelles ne dépend pas de la charge suspendue). La route étroite est plus courte, mais davantage sujette aux embouteillages; imaginons que la durée du trajet en minutes est égale au flux horaire de véhicules divisé par 50 (c'est l'analogue de l'élastique, dont la longueur est proportionnelle à la tension). Le pont qui relie les deux points de jonction entre route et autoroute est l'analogue de la ficelle noire.

Tant qu'il y a moins de 1000 véhicules, le trajet par la petite route est plus rapide que par l'autoroute. Comme les automobilistes déterminent individuellement leur parcours, chacun d'eux choisira comme itinéraire la petite route verte puis, en passant par le pont, la petite route rouge. S'ils sont 1000, le temps de trajet total sera de $20 + 20 = 40$ minutes.

Si le pont est bloqué, le réseau présente alors deux parcours équivalents. Chaque nouvel automobiliste qui arrive a intérêt à prendre le trajet où le nombre de véhicules déjà présent est le plus petit,

LE PARADOXE ROUTIER DE BRAESS

On considère le réseau routier illustré ici, reliant une ville (en haut) à une autre (en bas). Lorsque le pont est ouvert (a), le trajet le plus court est celui passant par les routes rectilignes (mais étroites). Tous les automobilistes seront tentés de l'emprunter, au prix d'une forte densité de trafic (en violet foncé), voire d'embouteillages; le trafic est alors nul (en blanc) sur les autoroutes, plus longues. Si le pont est fermé (b), les deux trajets possibles deviennent équivalents: le trafic (en violet clair) se répartit alors équitablement entre les deux, ce qui évite la congestion du réseau.



si bien que, statistiquement, ils se répartissent de façon égale entre les deux trajets. Il y aura donc 500 véhicules sur chaque trajet, dont la durée sera de $500/50 + 20 = 30$ minutes, c'est à dire 10 minutes de moins qu'avec le pont!

L'analogue entre les deux situations n'est cependant pas parfaite: alors que la mécanique respecte scrupuleusement «les lois du monde», dans le cas du trafic routier, le résultat découle d'un choix où chacun décide ce qu'il estime le mieux pour lui. Comment se fait-il alors que le résultat global ne soit pas un temps de trajet optimal, comme l'illustre la situation avec le pont?

C'est parce que, comme Dieter Braess l'a fait remarquer, il faut bien distinguer une situation d'équilibre d'un optimum. Dans le cas du réseau routier, seule une optimisation collective permet de minimiser le temps de trajet: ce n'est que si tous les utilisateurs se mettent ensemble pour décider du chemin de chacun qu'ils peuvent réduire leur temps de trajet. Dans le cas contraire, il faut les empêcher de prendre le pont! Dans le monde réel, les recherches montrent que ce paradoxe est omniprésent dans des situations variées mais qu'il est difficile à identifier parce que l'optimisation des réseaux fait partie des problèmes dits «NP-complets», qui sont les plus complexes. ■

BIBLIOGRAPHIE

A. E. Motter et M. Timme, **Antagonistic phenomena in network dynamics**, *Annual Review of Condensed Matter Physics*, vol. 9(1), pp. 463-484, 2018.

C. M. Penchina et L. J. Penchina, **The Braess paradox in mechanical, traffic, and other networks**, *American Journal of Physics*, vol. 71(5), pp. 479-482, 2003.

C. M. Penchina, **Braess paradox: Maximum penalty in a minimal critical network**, *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 31(5), pp. 379-388, 1997.

J.-M. Courty, **Un paradoxe mécanique**, vidéo de l'expérience : <https://youtu.be/GBuXtfsnOo>

POUR LA SCIENCE

Édition française de Scientific American

**COMPLÉTEZ VOTRE COLLECTION
DÈS MAINTENANT !**



N° 512 (juin 20)
réf. PL512



N° 511 (mai 20)
réf. PL511



N° 510 (avril 20)
réf. PL510



N° 509 (mars 20)
réf. PL509



N° 508 (fév. 20)
réf. PL508



N° 507 (jan 20)
réf. PL507



N° 506 (déc. 19)
réf. PL506



N° 505 (nov. 19)
réf. PL505



N° 504 (oct. 19)
réf. PL504



N° 503 (sept. 19)
réf. PL503



N° 502 (août 19)
réf. PL502



N° 501 (juillet 19)
réf. PL501

À retourner accompagné de votre règlement à :

Next2C – Service abonnements Pour la Science – 26 BD Président Wilson CS 40032 – 67085 Strasbourg CEDEX – email : pourlascience@abopress.fr



OUI, je commande des numéros de Pour la Science, au tarif unitaire de 9,90 €.

1 / JE REPORTE CI-DESSOUS LES RÉFÉRENCES à 5 chiffres correspondant aux numéros commandés :

1^{re} réf. _____ 01 x 9,90 € = 9,90 €
 2^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €
 3^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €
 4^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €
 5^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €
 6^e réf. _____ x 9,90 € = _____ €

TOTAL À RÉGLER _____ €

Groupe Pour la Science – Siège social : 170 bis, boulevard du Montparnasse, CS20012, 75680 Paris Cedex 14 – Sarl au capital de 32000 € – RCS Paris B 311 797 393 – Siret : 311 797 393 000 23 – APE 5814 Z

Offre valable jusqu'au 31/12/2020 en France Métropolitaine uniquement. Pour l'export, rendez-vous sur notre site internet boutique.pourlascience.fr. Les prix affichés incluent les frais de port et les frais logistiques.
 Les informations que nous collectons dans ce bulletin d'abonnement nous aident à personnaliser et à améliorer les services que nous vous proposons. Nous les utiliserons pour gérer votre accès à l'intégralité de nos services, traiter vos commandes et paiements, et vous faire part notamment par newsletters de nos offres commerciales moyennant le respect de vos choix en la matière. Le responsable du traitement est la société Pour la Science. Vos données personnelles ne seront pas conservées au-delà de la durée nécessaire à la finalité de leur traitement. Pour la Science ne commercialise ni ne loue vos données à caractère personnel à des tiers. Les données collectées sont exclusivement destinées à Pour la Science. Nous vous invitons à prendre connaissance de notre charte de protection des données personnelles à l'adresse suivante : <https://rebrand.ly/charte-donnees-pls>. Conformément à la réglementation applicable (et notamment au Règlement 2016/679/UE dit « RGPD ») vous disposez des droits d'accès, de rectification, d'opposition, d'effacement, à la portabilité et à la limitation de vos données personnelles. Pour exercer ces droits (ou nous poser toute question concernant le traitement de vos données personnelles), vous pouvez nous contacter par courriel à l'adresse protection-donnees@pourlascience.fr.

2 / J'INDIQUE MES COORDONNÉES

☐ M. ☐ Mme

Nom : _____

Prénom : _____

Adresse : _____

Code postal _____ Ville : _____

Téléphone _____

J'accepte de recevoir les offres de Pour la Science ☐ OUI ☐ NON

3 / JE CHOISIS MON MODE DE RÈGLEMENT

☐ Par chèque à l'ordre de Pour la Science

☐ Carte bancaire

N° _____

Date d'expiration _____

Clé (les 3 chiffres au dos de votre CB) _____

Signature obligatoire :



**RETROUVEZ TOUS LES ANCIENS NUMÉROS SUR
BOUTIQUE.POURLASCIENCE.FR**