



Rafinesque décrit de multiples espèces végétales, comme la gyroselle pauciflore, *Dodecatheon pulchellum* (à gauche). Grand amateur de chiroptères, il en décrit aussi plusieurs, dont le molosse de Cestoni, *Tadarida teniotis* (à droite).

ce texte se révéla un faux. Rafinesque aurait-il ici été dupé une fois de plus? Il n'en reste pas moins que ses contributions substantielles à l'étude raisonnée des sites archéologiques amérindiens, souvent plagiées par ses successeurs immédiats, sont reconnues de nos jours.

Ce n'est pas tout. S'appuyant sur ses travaux en systématique végétale, et très influencé par le botaniste Michel Adanson, Constantin Rafinesque fut l'un des premiers évolutionnistes importants, ainsi que le souligne Darwin lui-même dans l'historique qu'il a ajouté à des éditions ultérieures de *L'Origine des espèces* (1859). Pour Rafinesque, l'extrême diversité des espèces animales et végétales actuelles procède d'un nombre restreint de formes ancestrales. Bien avant le botaniste néerlandais Hugo De Vries, il emploie le terme «mutations» pour désigner les transformations évolutives. Qui plus est, il s'interroge aussi sur les changements possibles de «tempo» lors du processus évolutif, question qui sera fort débattue tout au long du <sup>xx</sup>e siècle...

## UN LEGS SCIENTIFIQUE CONSIDÉRABLE

Le décès de Rafinesque a fait couler presque autant d'encre que son existence mouvementée. Depuis son retour du Kentucky, il demeurerait à Philadelphie, l'un des hauts lieux de la vie scientifique et intellectuelle des États-Unis d'alors, où il enseignait et travaillait à de multiples projets d'ouvrages. L'on a souvent écrit qu'il était mort dans un misérable taudis. Il convient de faire un sort à cette légende romanesque: en réalité, si ses revenus avaient

beaucoup diminué, il avait encore les moyens de louer une maison dans un quartier populaire de la ville. C'est là qu'il s'éteignit le 18 septembre 1840, des suites d'un cancer de l'estomac, après avoir été suivi dans ses derniers mois par deux éminents praticiens.

Dans les décennies qui suivirent sa disparition, le legs scientifique de cette personnalité controversée, desservie par son obsession de briller à tout prix, commença à être reconnu. Ainsi, c'est Asa Gray, l'un des maîtres de la botanique américaine, converti à l'évolutionnisme, qui attira l'attention de Darwin sur l'œuvre de Constantin Rafinesque... après l'avoir longtemps dénigrée. Avec le recul, le travail d'inventaire de la biodiversité effectué par le naturaliste franco-américain s'avère colossal: sur les milliers de taxons qu'il a décrits (qui concernaient aussi bien des mousses que des annélides ou des chauves-souris), pas moins de 160 genres et quelque 300 espèces sont encore tenus pour valides aujourd'hui. Quant à ses écrits, ils avoisinent le millier...

Rafinesque apparaît sans aucun doute comme l'un des pionniers majeurs de l'histoire naturelle américaine, aux côtés de William Bartram et Jean-Jacques Audubon. Laissons pour terminer le dernier mot à cet incorrigible optimiste, héritier des Lumières: «Si j'ai souvent devancé mes contemporains dans mes vues et [...] découvertes [...], je les lègue à ceux qui sauront les apprécier, et me rendre la justice que l'on m'a souvent refusée: aux amis des sciences utiles, des peuples opprimés [...] des vertus et de la paix, [...] aux savants éclairés et impartiaux.» ■

## BIBLIOGRAPHIE

N. Woodman, **Pranked by Audubon : C.S. Rafinesque's description of J.-J. Audubon's imaginary Kentucky mammals**, *Archives of Natural History*, vol. 43(1), pp. 95-108, 2016.

C. S. Rafinesque, **Voyages à travers l'Amérique (1802-1840)** (édités par Jean Rafinesque), 2007.

L. Warren, **Constantine Samuel Rafinesque : A voice in the American Wilderness**, University of Kentucky Press, 2004.

C. Boewe (éd.), **Profiles of Rafinesque**, University of Tennessee Press, 2003.

# R

## ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul  
 P.86 Art & science  
 P.88 Idées de physique  
 P.92 Chroniques de l'évolution  
 P.96 Science & gastronomie  
 P.98 À picorer

# CINQ PÉPITES MATHÉMATIQUES DE JOHN CONWAY

Le grand mathématicien britannique vient de disparaître. Pour lui rendre hommage, voici un petit échantillon de mathématiques comme les aimait ce magicien des jeux et des nombres.

## L'AUTEUR



**JEAN-PAUL DELAHAYE**  
 professeur émérite  
 à l'université de Lille  
 et chercheur au  
 laboratoire Cristal  
 (Centre de recherche  
 en informatique, signal  
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

**L**e 11 avril 2020, John Horton Conway décédait à l'âge de 82 ans du Covid-19 à Princeton, aux États-Unis. Il était le mathématicien qui a été mentionné le plus souvent dans cette rubrique (plus de trente fois). En préparant les articles, je suis tombé à diverses reprises, et à mon grand étonnement, sur un résultat qu'il avait démontré ou une idée importante qu'il avait été le premier à proposer sur le thème retenu. John Conway aimait les questions mathématiques simples et concrètes qui stimulaient sa créativité.

Le meilleur hommage qu'on puisse lui rendre est de montrer le type de mathématiques qui l'émerveillait et le passionnait. Je vais aborder cinq thèmes différents où il est intervenu, mais ce sont plusieurs livres qu'il faudrait pour rendre justice à ce découvreur exceptionnel, capable dans une multitude de domaines aussi bien d'inventer des objets et des problèmes que de résoudre les énigmes les plus récalcitrantes en créant des méthodes que personne n'imaginait.

## L'IRRATIONALITÉ DE $\sqrt{2}$

L'un des plus surprenants et importants résultats mathématiques est l'irrationalité

de  $\sqrt{2}$ , la longueur de la diagonale d'un carré de côté unité :  $\sqrt{2}$  ne peut être exprimé par le quotient  $n/m$  de deux nombres entiers  $n$  et  $m$ . On attribue la découverte de l'irrationalité à Pythagore ou l'un de ses disciples, sans savoir si le raisonnement trouvé était arithmétique ou géométrique. Cette preuve et découverte a profondément troublé les mathématiciens. Ce premier résultat négatif en mathématiques montre que les humains n'inventent pas les lois régissant les nombres, mais les découvrent au cours de leur exploration d'une terre mathématique inconnue.

Il existe de nombreuses démonstrations du résultat, mais la plus instantanée tient en un petit dessin très simple présenté par John Conway dans un article paru en 2006. Il attribuait la découverte de la preuve à un certain Stanley Tennenbaum dont il indiquait qu'il avait abandonné les mathématiques. On peut se demander si ce n'est pas Conway lui-même qui l'a découverte. C'est sans importance, car même s'il n'en est pas l'inventeur, cette preuve donne un exemple parfait de la conception que Conway avait des mathématiques et qu'il a illustrée de cent façons différentes. On en tire aussi qu'il est faux de croire que tout ce qui est simple a déjà été découvert : des idées lumineuses et d'une grande simplicité attendent d'être dévoilées.

## JOHN CONWAY (1937-2020)

# 1

Les domaines de recherche de ce remarquable mathématicien étaient la théorie des groupes, la théorie des nœuds, la géométrie, l'analyse, la théorie des jeux combinatoires, l'algèbre, l'algorithmique et même la physique théorique. Un livre de Siobhan Roberts décrit ce mathématicien à l'imagination sans limite et retrace sa vie (*Genius at Play, The Curious Mind of John Horton Conway*, Bloomsbury, 2015).

Le goût et le talent de Conway l'ont conduit à inventer le remarquable automate cellulaire du « jeu de la vie » dont cinquante ans de travaux n'ont pas épuisé la richesse (voir l'encadré 4).

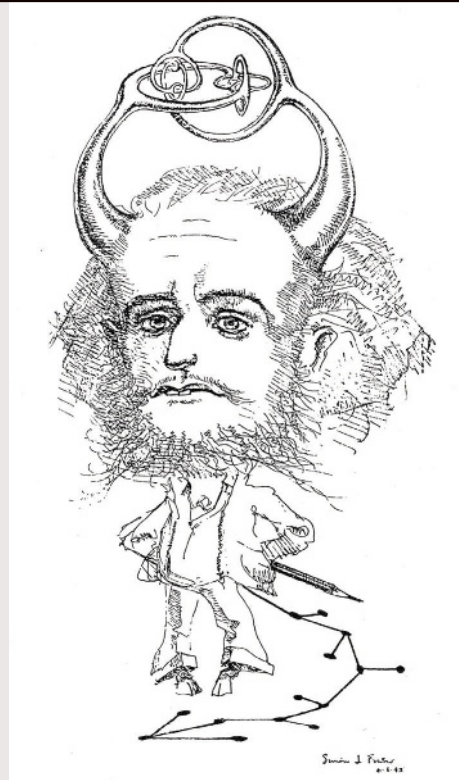
Cet amour des mathématiques pour tous l'a amené à contribuer aux problèmes qui passionnent les amateurs de récréations mathématiques, tels que la célèbre conjecture de Collatz (voir la fin de l'article).

Dans le même esprit, il a aussi imaginé des casse-tête de rangement d'une boîte de cubes qui sont à la fois élégants et ne peuvent être résolus en temps

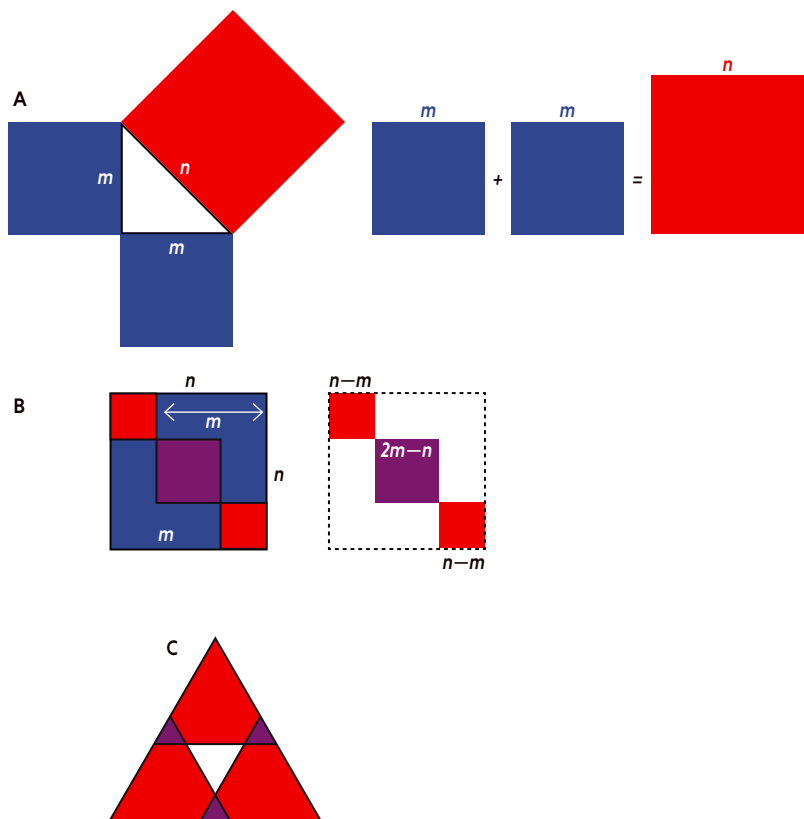
raisonnable que par d'astucieux raisonnements.

D'après lui, sa plus importante contribution est sa conception d'un merveilleux système de nombres, le corps des nombres surréels, qui contient à la fois les entiers, les réels, les nombres transfinis de Cantor et les infinitésimaux, structure que personne n'avait imaginé possible, où tout peut s'additionner, se multiplier, etc.

Ceux qui ont travaillé avec Conway racontent qu'il pensait si vite que, à peine un problème énoncé, le plus souvent il en formulait la solution. Neil Sloane, le maître d'œuvre de la fameuse encyclopédie en ligne des suites numériques (<https://oeis.org>) a écrit une cinquantaine d'articles avec lui. Il décrit leur travail commun : « J'ai collaboré avec beaucoup de gens, mais il était le plus rapide à résoudre un problème. [...] Quand nous travaillions ensemble, notre devise était d'aller aussi loin que n'importe quel homme raisonnable peut le faire, puis de poursuivre largement au-delà. »



Dessin de Simon Fraser représentant Conway couronné d'un remarquable objet topologique, la sphère cornue du mathématicien James Alexander (1888-1971).



Dire que  $\sqrt{2}$  est un quotient  $n/m$  de deux entiers, c'est dire que  $2 = n^2/m^2$  pour deux entiers  $n$  et  $m$  ou encore que  $2m^2 = n^2$ . Il existerait donc un carré de côté entier  $m$  dont le double de l'aire serait égal à celle d'un carré de côté entier  $n$  (figure A ci contre). Nous supposons que le  $m$  de notre dessin est le plus petit entier positif vérifiant cette égalité : l'hypothèse est licite, car quand une propriété est vraie pour certains entiers positifs, il existe nécessairement un plus petit entier qui la vérifie.

En calant les deux carrés bleus dans deux coins opposés du carré rouge, on obtient une nouvelle figure (figure B ci-contre), où les deux coins rouges doivent avoir la même aire que le carré central violet, qui correspond au recouvrement des deux carrés bleus.

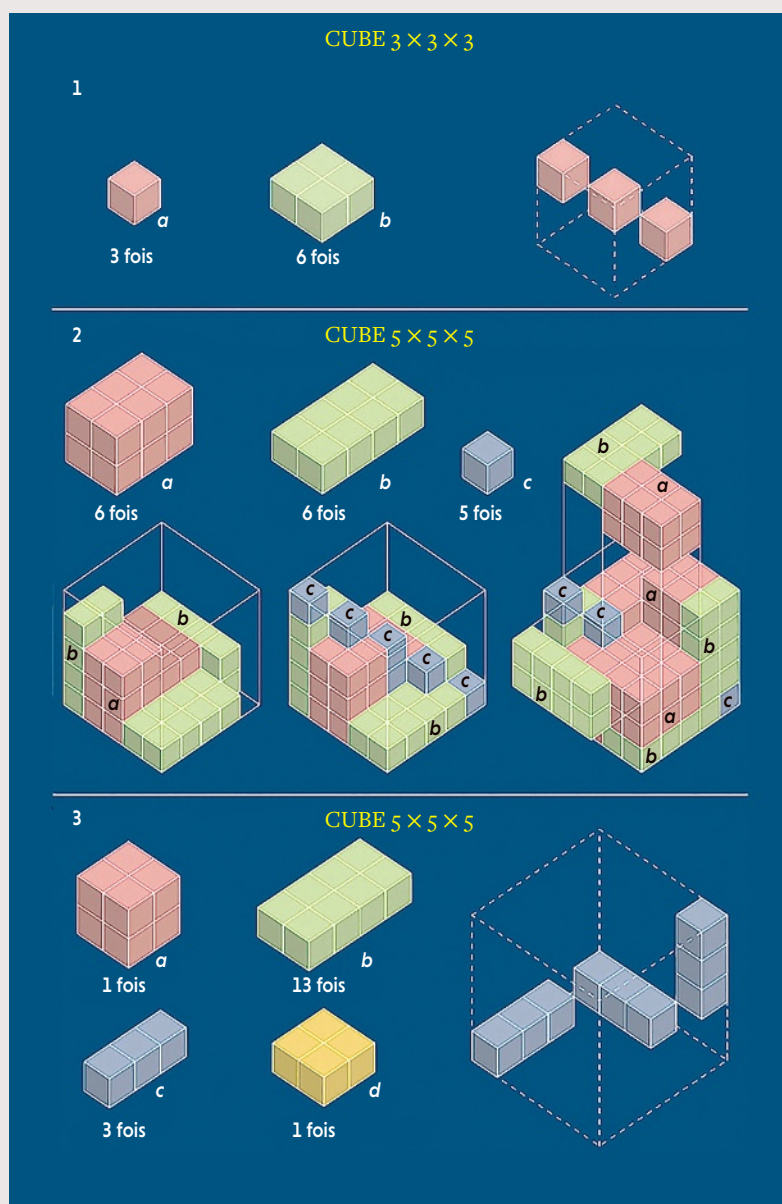
En effet, les deux bleus doivent valoir le rouge (figure A), et donc ce qui n'est pas couvert par les carrés bleus a une aire égale à ce qui est couvert deux fois par les carrés bleus ; on a donc trouvé deux carrés égaux et plus petits (en rouge sur le dessin B) qui, ensemble, ont la même aire qu'un carré plus grand (en violet). Par construction, les nouveaux petits carrés ont chacun pour côté l'entier  $n-m$  et le grand en violet a pour côté l'entier  $n-2(n-m) = 2m-n$ . ➤

## 2

## RANGEMENTS DE PAVÉS DANS UN CUBE

**J**ohn Conway a imaginé des casse-tête de rangement qui sont à la fois élégants, car n'utilisant que peu de pièces différentes, et assez difficiles... sauf si l'on accepte de raisonner (voir le raisonnement pour le casse-tête 1 dans le texte de l'article). Pour le casse-tête 2, la solution est indiquée en vue éclatée ; pour achever

la construction, il suffit de descendre les structures supérieures puis de placer la plaque verte b au-dessus de la plaque rose a. Le raisonnement sur la parité nous oblige à placer les cubes unités le long de la diagonale. Pour le casse-tête 3, seul le début de la solution est indiqué.



> C'est donc que le carré initial de côté  $m$  n'était pas le plus petit possible permettant l'égalité géométrique. On a une contradiction et donc l'hypothèse de départ est fausse (raisonnement par l'absurde):  $\sqrt{2}$  n'est pas un quotient de deux entiers, c'est donc un nombre irrationnel. En transposant, vous pouvez démontrer que  $\sqrt{3}$  est irrationnel (figure C).

## TROIS CASSE-TÊTE DE REMPLISSAGE D'UNE BOÎTE CUBIQUE

Il existe une multitude de casse-tête consistant à ranger dans une boîte, en général un parallélépipède rectangle, des pièces en petit nombre, par exemple 10, qui, elles aussi, sont des parallélépipèdes rectangles. Par tâtonnements, on finit par trouver la solution. Sur un tel sujet, à moins de multiplier les pièces et la variété de leurs formes, il est difficile d'arriver à un problème difficile. De plus, même s'il est amusant de manipuler les pièces jusqu'à arriver à la solution, seuls de petits raisonnements sur la forme des pièces entrent en jeu et ils limitent assez peu le temps de recherche.

John Conway a changé cette situation en imaginant trois casse-tête où, en l'absence de raisonnement, vous risquez de tourner en rond sans jamais réussir à remplir la boîte, alors qu'en menant des considérations astucieuses et ordonnées, vous serez rapidement conduit à la solution.

Le plus simple des trois casse-tête consiste à remplir un cube  $3 \times 3 \times 3$ , avec trois cubes  $1 \times 1 \times 1$  et six parallélépipèdes  $1 \times 2 \times 2$ .

Le raisonnement consiste à prendre en compte la parité. Le cube  $3 \times 3 \times 3$  est composé de trois couches horizontales de forme  $3 \times 3 \times 1$ , donc chacune de volume 9. On peut aussi décomposer le cube  $3 \times 3 \times 3$  en trois parallélépipèdes verticaux  $3 \times 3 \times 1$ , chacun parallèle à une face verticale du cube. En considérant la face verticale perpendiculaire, on a une troisième décomposition du cube en trois parallélépipèdes  $3 \times 3 \times 1$ .

Examinons ces neuf parallélépipèdes. Quand on positionne une forme  $1 \times 2 \times 2$  dans le cube, elle ne peut occuper qu'un nombre pair de cubes d'un de ces neuf parallélépipèdes  $3 \times 3 \times 1$ . Il faut donc que chacun d'eux contienne un des petits cubes  $1 \times 1 \times 1$ , et un seul (sinon, il en faudrait trois dans un même parallélépipède  $3 \times 3 \times 1$ , ce qui empêcherait d'en mettre dans les deux qui sont parallèles). La face supérieure du cube doit donc contenir un carré  $1 \times 1 \times 1$ . Si on le place au centre de la face, on tombe rapidement sur une impasse: l'obligation de placer un autre petit cube juste en dessous, ce qui en placerait deux dans un même paquet  $3 \times 3 \times 1$ . Si on place le petit cube de la face supérieure au milieu d'un côté, on arrive aussi immédiatement à une impasse. Il

faut donc placer le petit cube de la face supérieure dans un coin.

Il en va de même pour la face inférieure dans laquelle un petit cube doit être placé dans un coin, qui ne peut être que celui diamétralement opposé au petit cube de la face supérieure. Le troisième petit cube est alors nécessairement au centre. Le reste s'impose de proche en proche. Notons que ce raisonnement non seulement produit une solution, mais montre aussi qu'aux symétries près, il n'y en a qu'une seule.

Les deux autres puzzles de rangement de Conway sont illustrés dans l'encadré 2 avec des indications pour leur solution. Amusez-vous à trouver les raisonnements qui amènent droit vers le rangement complet.

### LE PROBLÈME DES DEUX SORCIERS

Dans les années 1960, Conway a imaginé un incroyable problème qui, récemment encore, a donné lieu à des discussions et à la publication d'un article par Tanya Khovanova, du MIT (*voir la bibliographie*). En voici l'énoncé :

« Hier soir, j'étais assis derrière deux sorciers dans un bus et j'ai entendu ce qu'ils disaient :

A : J'ai un nombre entier d'enfants, dont les âges sont des entiers non nuls. La somme de ces âges est le numéro de ce bus, et leur produit est mon propre âge.

B : Comme c'est intéressant ! Peut-être que si vous me disiez votre âge et le nombre de vos enfants, je pourrais calculer chacun de leurs âges ?

A : NON.

B : Parfait, maintenant je sais quel âge vous avez !

La question est : quel est le numéro du bus ? »

Précisons que dans le dialogue, le « non » du sorcier A ne signifie pas qu'il refuse de répondre, mais que la connaissance de son âge et du nombre de ses enfants ne permet pas de connaître individuellement leurs âges. Bien sûr, il faut prendre en compte que le sorcier B connaît le numéro du bus. Précisons encore que les sorciers peuvent être très jeunes ou très vieux : il n'y a aucune impossibilité à envisager que l'âge du sorcier A soit 2 ans ou 20 000 ans.

Voici la solution, que je n'ai pu comprendre et vérifier entièrement qu'en m'aidant d'un programme. Je ne peux pas recopier tous les calculs que nécessite la conclusion, mais vous pouvez croire ce que j'affirme ou... refaire tous les calculs omis.

Notons  $a$  l'âge du sorcier A,  $b$  le numéro du bus,  $c$  le nombre de ses enfants. Supposons par exemple que le numéro du bus soit  $b=5$ . Les diverses options sont :

•  $c=5$  avec pour âges des enfants 1, 1, 1, 1, 1 et donc  $a=1$ ;

# 3

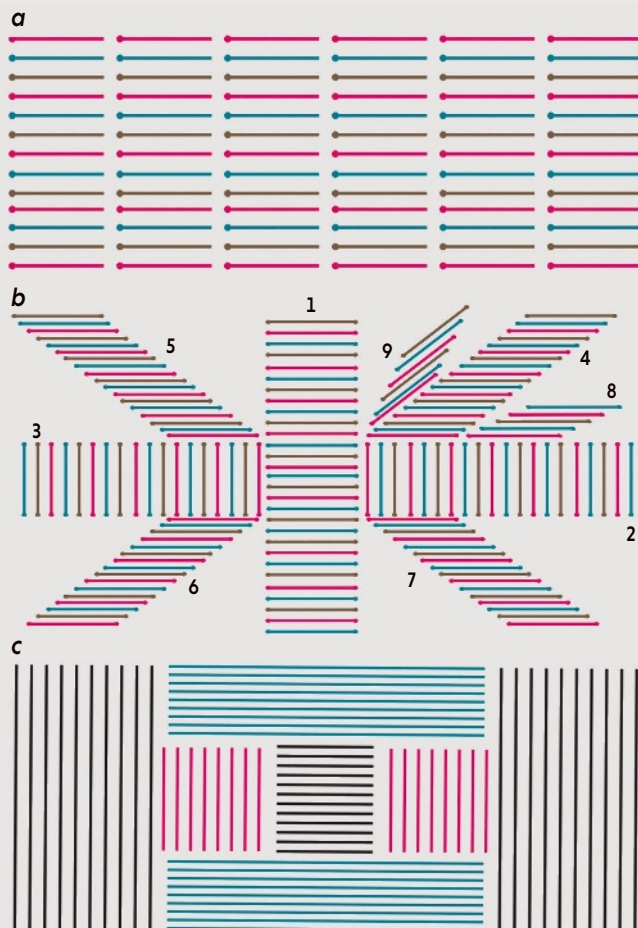
## LES PAVAGES FINS

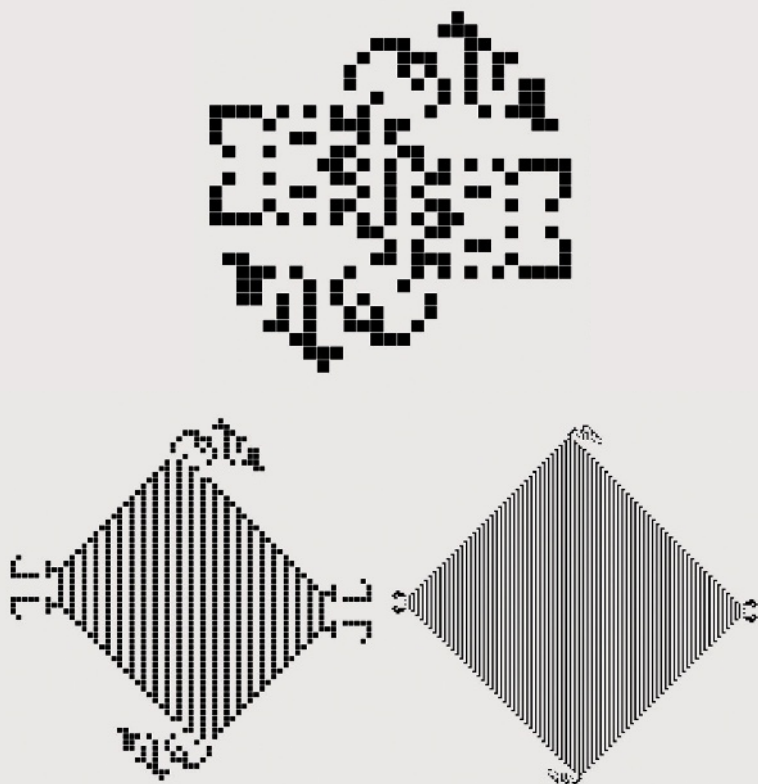
**J**ohn Conway et Hallard Croft ont conçu des pavages du plan avec des segments de droite. La figure a indique comment on réalise un pavage avec des segments semi-ouverts  $[A, B[$  (où le point A est inclus, et le point B est exclu). C'est facile, car, en les mettant bout à bout, on est ramené au pavage évident par des droites.

La figure b illustre la solution pour des segments de même taille fermés  $[A, B]$  (où A et B appartiennent au segment). L'empilement 1 est placé en premier. L'empilement 2 est alors ajouté, mais, bien évidemment, le segment le plus à gauche de cette pile n'est pas retenu.

Pour l'empilement 3, on omet de prendre le segment le plus à droite. Pour les piles obliques qu'on ajoute et qui sont de plus en plus fines, à chaque fois le « premier » segment est omis.

La figure c montre une solution pour des segments ouverts  $]A, B[$  (où A et B sont exclus), de tailles différentes. Les segments du carré central donnent un carré ouvert (ni les côtés ni les sommets du carré ne sont couverts par ce premier empilement). Chaque rectangle obtenu progressivement lors de l'ajout de nouvelles piles est lui aussi ouvert. Avec des segments ouverts de même longueur, il n'y a pas de solution.





# 4

## UNE NOUVELLE CONFIGURATION DU JEU DE LA VIE

**L**e Jeu de la vie inventé en 1970 par Conway est toujours étudié et tous les problèmes qu'il pose n'ont pas été résolus. Une case du quadrillage carré du plan infini peut être vivante ou morte ; d'une génération à l'autre, une case passe de l'état vivant (*en noir*) à l'état mort (*en blanc*), ou l'inverse, ou reste stable, en fonction de ses huit cases voisines immédiates qui sont mortes ou vivantes.

La règle d'évolution tient en douze mots : naissance si trois voisines vivantes, survie si deux ou trois voisines vivantes. Certaines configurations ayant peu de cellules vivantes au départ s'étendent infiniment. Au mieux, la croissance du nombre de cellules vivantes augmente proportionnellement à  $n^2$  où  $n$  est le numéro de la génération. Au mieux, la densité de cellules vivantes dans une partie stable du plan est  $1/2$ . Le résultat a été

démonstré sur 29 pages en 1997 par Noam Elkies, de l'université Harvard.

L'extraordinaire configuration figurée en haut a été découverte en avril 2020 par Mateusz Naściszewski ([www.conwaylife.com/wiki/Max](http://www.conwaylife.com/wiki/Max)). C'est la plus petite configuration connue qui, une fois lancée, recouvre avec une croissance quadratique le plan d'une population stable de cellules vivantes de densité  $1/2$  (c'est donc le mieux possible en vitesse et en densité). Elle comporte 183 cellules au départ. On a dessiné à des échelles différentes la génération 0, et deux autres générations. On pense qu'il est impossible de faire mieux que 183, mais nul ne sait le démontrer. Notons aussi qu'il existe des configurations qui calculent les nombres premiers ou même qui affichent les unes après les autres des dessins représentant les décimales de  $\pi = 3,14159...$

- > •  $c=4$  avec pour âges des enfants 1, 1, 1, 2 et donc  $a=2$ ;
- $c=3$  avec pour âges des enfants 1, 1, 3 et donc  $a=3$ ;
- $c=3$  avec pour âges des enfants 1, 2, 2 et donc  $a=4$ ;
- $c=2$  avec pour âges des enfants 1, 4 et donc  $a=4$ ;
- $c=2$  avec pour âges des enfants 2, 3 et donc  $a=6$ ;
- $c=1$  avec pour âges des enfants 5 et donc  $a=5$ .

Dans chacun des cas possibles, la connaissance de l'âge du sorcier et du nombre de ses enfants permet de connaître leurs différents âges. Puisque A a répondu NON, et que B connaît le numéro du bus, cela signifie que  $b$  n'est pas égal à 5.

Pour résoudre le problème, on peut de la même façon prendre les numéros de bus possibles un par un et rechercher ceux qui entraîneront que « la connaissance de l'âge du sorcier et du nombre de ses enfants n'entraîne pas la connaissance de chacun des âges des enfants » (propriété P).

En menant les calculs pour  $b=1, 2, 3, \dots, 12$  (comme on vient de le faire pour  $b=5$ ), on découvre que  $b=12$  est le plus petit nombre ayant cette propriété P.

En effet pour  $b=12$  et  $c=4$ , on a deux listes d'âges possibles de même longueur pour les enfants, (2, 2, 2, 6) et (1, 3, 4, 4), qui donnent le même âge pour le sorcier A,  $a=48$ . Il n'existe pas deux autres listes de même longueur et de même produit pour  $b=12$ . Pour  $b=12$ , même en sachant que  $c=4$  et  $a=48$ , il est donc impossible de déduire la liste des âges des enfants. Peut-on en déduire que  $b=12$  est la solution ?

Malheureusement non. Pour le numéro de bus  $b=13$ , à cause des listes (1, 6, 6) et (2, 2, 9) qui sont toutes les deux compatibles avec  $a=36$ , le sorcier B ne peut pas non plus tirer de la connaissance de l'âge de A et du nombre de ses enfants les âges de ces derniers.

Savoir que  $b=12$  ne permet pas plus de conclure à l'âge des enfants que savoir que  $b=13$ . Ceux à qui on pose le problème répondent souvent «  $b=12$  » comme si l'énoncé affirmait que la plus petite solution possible pour  $b$  était la bonne. Mais ce n'est pas indiqué dans l'énoncé et sans argument supplémentaire, on ne peut pas choisir entre  $b=12$  et  $b=13$ , ni d'ailleurs entre d'autres valeurs pour  $b$  comme la poursuite du calcul montre qu'il y en a.

Pourtant  $b=12$  est la bonne réponse et sa justification est le côté le plus intéressant et inattendu du problème. Conway a soigneusement rédigé son énoncé et la dernière phrase du sorcier B doit être prise en compte. Après le NON prononcé par A, le sorcier B a ajouté : « Parfait, maintenant je sais quel âge vous avez ! » Cela permet d'éliminer  $b=13$ .

En effet, pour  $b=13$ , il y a aussi les deux listes d'âges des enfants (1, 2, 2, 2, 6) et (1, 1, 3, 4, 4) qui donnent l'âge  $a=48$ . Autrement dit, si le bus avait pour numéro 13, B ne pourrait pas déduire de la réponse négative du sorcier A l'âge de A, car celui-ci pourrait être 36 ou 48. Le numéro de bus  $b=13$  est donc à éliminer.

Mais l'élimination de  $b=13$  entraîne l'élimination de  $b=14$  en considérant les séquences d'âges trouvées pour  $b=13$  et en leur ajoutant le nombre 1, ce qui donne (1, 1, 6, 6) et (1, 2, 2, 9) avec  $a=36$  d'une part, et (1, 1, 2, 2, 2, 6) et (1, 1, 1, 3, 4, 4) avec  $a=48$  d'autre part. Selon le même procédé de l'élimination de  $b=14$ , on en tire l'élimination de  $b=15$  et, de proche en proche, de tous les  $b$  supérieurs à 12.

Finalement, seul reste le numéro de bus  $b=12$  avec les séquences (2, 2, 2, 6) et (1, 3, 4, 4), qui donnent l'âge du sorcier A:  $a=48$ .

À la vue de tous les calculs qu'il faut faire pour avoir la solution et dont je n'ai pas recopié le détail qui occupe plusieurs pages, j'avoue que je ne comprends pas comment Conway a pu concevoir ce problème inouï!

## PAVAGES DU PLAN PAR DES SEGMENTS DE DROITE

Paver le plan avec des carrés est facile, et il en est de même avec des triangles équilatéraux ou des hexagones. On peut aussi paver le plan avec des droites: il suffit de les placer toutes côte à côte et parallèles. Il y en aura une infinité non dénombrable, mais ce sera un pavage parfaitement satisfaisant, car chaque point du plan appartiendra à une droite du pavage et à une seule. Voici des questions plus délicates:

- Peut-on paver le plan avec des segments fermés, c'est-à-dire des segments de droite  $[A, B]$  incluant les extrémités?

- Peut-on paver le plan avec des segments ouverts, c'est-à-dire des segments  $]A, B[$  dont on ne retient pas les extrémités?

- Peut-on paver le plan avec des segments semi-ouverts, c'est-à-dire des segments  $]A, B]$  dont on ne retient qu'une seule extrémité?

Réfléchissez à ces questions inhabituelles, mais naturelles. Elles ne sont pas si simples. L'encadré 3 donne les solutions. Dans un magnifique article de 1964, Conway abordait avec un collègue (voir la bibliographie) ce type de questions et bien d'autres, prouvant encore une fois que des questions très simples auxquelles personne ne pense sont de belles occasions de faire des mathématiques... pas tout à fait évidentes.

## L'INDÉCIDABILITÉ DE LA CONJECTURE DE COLLATZ

Le dernier thème intéresse les mathématiciens amateurs autant que les professionnels. Considérons la fonction  $f$  qui, pour les

entiers positifs pairs  $n$  donne  $n/2$ , et qui donne  $3n+1$ , pour les entiers positifs impairs. Partons de l'entier 7 et appliquons  $f$ : on obtient 22, puis en recommençant, 11, puis 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc. Une fois que l'on arrive à 1, on tourne en rond.

Quel que soit l'entier  $n$  de départ, il semble qu'on finisse toujours par arriver à 1 et à tourner en rond. Des calculs par ordinateur ont testé cette propriété, qui est vraie pour tous les  $n$  jusqu'à au moins  $87 \times 2^{60}$  (environ  $10^{20}$ ). On n'a cependant pas réussi à prouver que c'est toujours le cas, ni à trouver de  $n$  initial qui donnerait une suite allant vers l'infini ou aboutissant à un autre cycle que (4, 2, 1).

Une multitude de travaux ont été consacrés au problème (nommé «conjecture de Collatz» ou «conjecture de Syracuse»), dont plusieurs ont été réunis en un livre (voir la bibliographie). La grande simplicité de l'énoncé du problème attire les amateurs, et je reçois régulièrement des propositions de solutions qui, jusqu'à présent, sont soit fausses soit incompréhensibles.

Conway face à un tel défi, aussi simple à énoncer et qui pourtant résiste depuis plus de quatre-vingts ans à toutes les tentatives de résolution, ne pouvait rester indifférent.

En 1972, il a publié un premier article sur le sujet où il propose des problèmes d'une formulation proche dont il démontre l'indécidabilité. Pour certaines valeurs de l'entier de départ, la suite engendrée par la variante de  $f$  ne finit pas par arriver à 1, mais la théorie des ensembles ne peut pas le démontrer. Plus généralement, pour tout système de démonstration  $S$ , il existe un problème de cette catégorie et un point de départ qui n'aboutit pas à 1, ce qui n'est pas démontrable avec les moyens de  $S$ .

En 2013, Conway est revenu sur la question et a donné des arguments de type probabiliste suggérant que le problème de Collatz lui-même échappe au pouvoir des preuves des systèmes d'axiomes utilisés habituellement en mathématiques. Il ne s'agit pas d'une démonstration définitive de l'indécidabilité de la conjecture de Collatz, mais le type d'arguments qu'il propose semble assez sérieusement indiquer que ce n'est pas un hasard si tout le monde bute sur la résolution de la conjecture.

Tout mathématicien rencontre des problèmes qu'il ne réussit pas à résoudre. Conway n'a pas échappé à cette règle générale, mais ses capacités particulières de logicien lui ont en quelque sorte permis de se consoler en prouvant un résultat d'indécidabilité et en élaborant des arguments suggérant que ce problème, si simple à énoncer et qui lui a résisté, continuerait indéfiniment à résister à tous les mathématiciens. ■

## BIBLIOGRAPHIE

J. H. Conway, **On unsetttable arithmetical problems**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 120(3), pp. 192-198, 2013.

T. Khovanova, **Conway's Wizards**, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 35, pp. 18-20, 2013 (<https://arxiv.org/pdf/1210.5460.pdf>).

J. H. Conway, **Unpredictable iterations**, *Proceedings of Number Theory Conference*, Boulder, CO, 1972, pp. 49-52; Repris dans : J. Lagarias (ed.), **The Ultimate Challenge : The  $3x + 1$  Problem**, American Mathematical Society, 2010.

J. H. Conway, **The power of mathematics**, dans A. Blackwell & D. MacKay (eds.), *Power*, Cambridge University Press, 2006, pp. 36-50

J. H. Conway et H. T. Croft, **Covering a sphere with congruent great-circle arcs**, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 60(4), pp. 787-800, 1964.

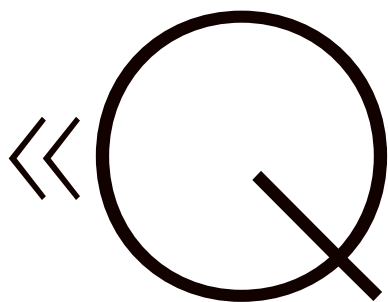
## L'AUTEUR



LOÏC MANGIN  
rédacteur en chef adjoint  
à *Pour la Science*

# LE MYSTÈRE DU COQUELICOT DE MONET

Au muséum de Rouen, on découvre pourquoi une espèce de coquelicot porte le nom de Claude Monet. C'est que l'illustre peintre, passionné d'horticulture, vivait entouré de botanistes !



« Que peut-il y avoir à dire, je vous le demande, d'un homme que rien au monde n'intéresse que sa peinture – et aussi son jardin et ses fleurs ? » C'est ainsi que Claude Monet s'interroge à son propos. Et, de fait, le père de l'impressionnisme aime passionnément l'horticulture. De 1883 jusqu'à sa mort en 1926, il aménage avec soin le « Clos Normand », les 96 ares entourant sa propriété de Giverny, dans l'Eure, prenant conseil auprès de professionnels de renom, comme Truffaut et Vilmorin, et d'amis tout aussi épris de plantes que lui, notamment Gustave Caillebotte. Glaïeuls, clématites, capucines, pivoines, passiflores... sortent

de terre, s'épanouissent et se succèdent tout au long de la belle saison. Et l'on trouve aussi des coquelicots dont le nom d'espèce est... *Papaver monetii*.

Pour comprendre l'incursion de Monet dans les sciences botaniques, entrons dans son intimité. À Giverny, il vit avec ses deux enfants, Michel et Jean, nés de son premier mariage avec Camille Doncieux, ainsi qu'avec Alice Raingo, qu'il épouse en 1892. Elle est la veuve (en 1891) d'Ernest Hoschedé, mécène du peintre et premier propriétaire d'*Impression, soleil levant*, qui a abandonné sa famille pour s'exiler en Belgique. Le couple Hoschedé avait six enfants, dont le dernier, Jean-Pierre, né dans un train entre Dax et Biarritz, est probablement le fils naturel de Monet, sa mère étant sa maîtresse depuis longtemps. Parmi la tribu de Giverny, on trouve également Blanche Hoschedé, fille d'Alice, peintre également, au talent reconnu. Georges Clemenceau la surnommait « L'Ange bleu ».

Il faut imaginer cette famille recomposée se promener dans la campagne, Claude et Blanche avec leur matériel de



*Papaver monetii*, un hybride récolté dans le jardin de Monet, à Giverny, dans l'Eure, le 30 juin 1897, et « épinglé » par Jean-Pierre Hoschedé, fils naturel de Claude Monet, et l'abbé Toussaint dans leur herbier.