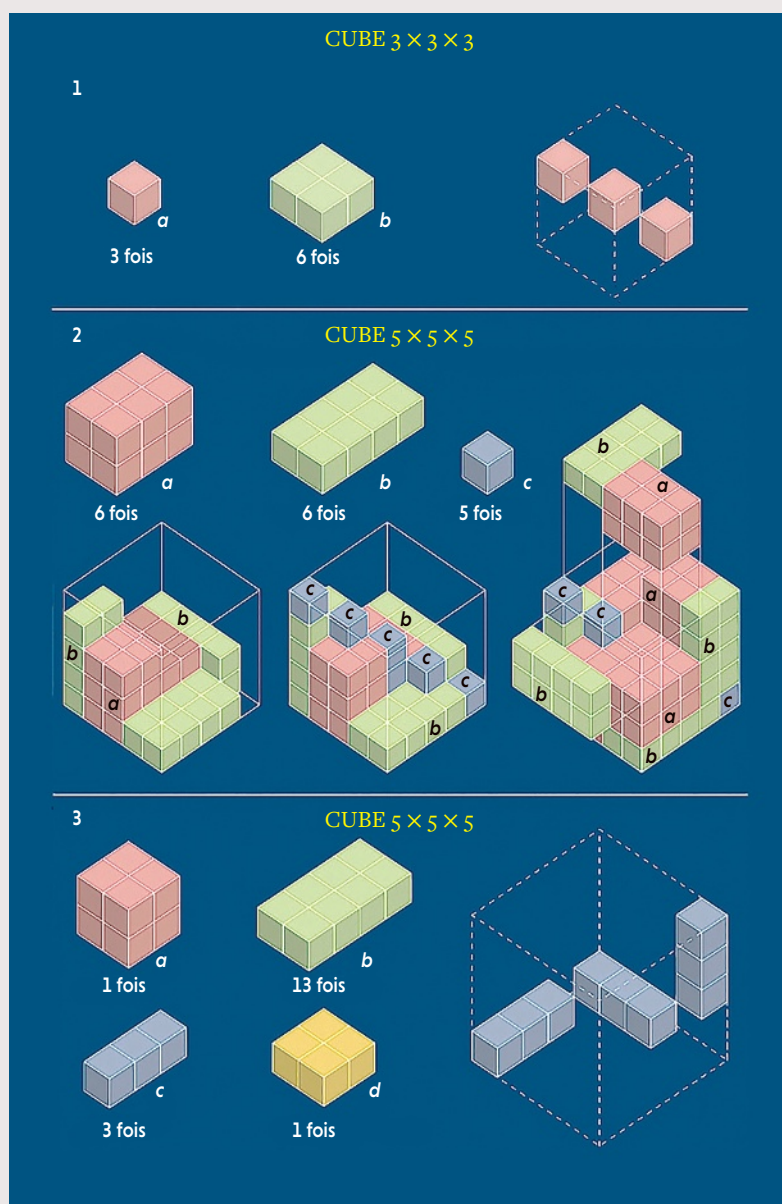


2

RANGEMENTS DE PAVÉS DANS UN CUBE

John Conway a imaginé des casse-tête de rangement qui sont à la fois élégants, car n'utilisant que peu de pièces différentes, et assez difficiles... sauf si l'on accepte de raisonner (voir le raisonnement pour le casse-tête 1 dans le texte de l'article). Pour le casse-tête 2, la solution est indiquée en vue éclatée ; pour achever

la construction, il suffit de descendre les structures supérieures puis de placer la plaque verte b au-dessus de la plaque rose a. Le raisonnement sur la parité nous oblige à placer les cubes unités le long de la diagonale. Pour le casse-tête 3, seul le début de la solution est indiqué.



> C'est donc que le carré initial de côté m n'était pas le plus petit possible permettant l'égalité géométrique. On a une contradiction et donc l'hypothèse de départ est fausse (raisonnement par l'absurde): $\sqrt{2}$ n'est pas un quotient de deux entiers, c'est donc un nombre irrationnel. En transposant, vous pouvez démontrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel (figure C).

TROIS CASSE-TÊTE DE REMPLISSAGE D'UNE BOÎTE CUBIQUE

Il existe une multitude de casse-tête consistant à ranger dans une boîte, en général un parallélépipède rectangle, des pièces en petit nombre, par exemple 10, qui, elles aussi, sont des parallélépipèdes rectangles. Par tâtonnements, on finit par trouver la solution. Sur un tel sujet, à moins de multiplier les pièces et la variété de leurs formes, il est difficile d'arriver à un problème difficile. De plus, même s'il est amusant de manipuler les pièces jusqu'à arriver à la solution, seuls de petits raisonnements sur la forme des pièces entrent en jeu et ils limitent assez peu le temps de recherche.

John Conway a changé cette situation en imaginant trois casse-tête où, en l'absence de raisonnement, vous risquez de tourner en rond sans jamais réussir à remplir la boîte, alors qu'en menant des considérations astucieuses et ordonnées, vous serez rapidement conduit à la solution.

Le plus simple des trois casse-tête consiste à remplir un cube $3 \times 3 \times 3$, avec trois cubes $1 \times 1 \times 1$ et six parallélépipèdes $1 \times 2 \times 2$.

Le raisonnement consiste à prendre en compte la parité. Le cube $3 \times 3 \times 3$ est composé de trois couches horizontales de forme $3 \times 3 \times 1$, donc chacune de volume 9. On peut aussi décomposer le cube $3 \times 3 \times 3$ en trois parallélépipèdes verticaux $3 \times 3 \times 1$, chacun parallèle à une face verticale du cube. En considérant la face verticale perpendiculaire, on a une troisième décomposition du cube en trois parallélépipèdes $3 \times 3 \times 1$.

Examinons ces neuf parallélépipèdes. Quand on positionne une forme $1 \times 2 \times 2$ dans le cube, elle ne peut occuper qu'un nombre pair de cubes d'un de ces neuf parallélépipèdes $3 \times 3 \times 1$. Il faut donc que chacun d'eux contienne un des petits cubes $1 \times 1 \times 1$, et un seul (sinon, il en faudrait trois dans un même parallélépipède $3 \times 3 \times 1$, ce qui empêcherait d'en mettre dans les deux qui sont parallèles). La face supérieure du cube doit donc contenir un carré $1 \times 1 \times 1$. Si on le place au centre de la face, on tombe rapidement sur une impasse: l'obligation de placer un autre petit cube juste en dessous, ce qui en placerait deux dans un même paquet $3 \times 3 \times 1$. Si on place le petit cube de la face supérieure au milieu d'un côté, on arrive aussi immédiatement à une impasse. Il

faut donc placer le petit cube de la face supérieure dans un coin.

Il en va de même pour la face inférieure dans laquelle un petit cube doit être placé dans un coin, qui ne peut être que celui diamétralement opposé au petit cube de la face supérieure. Le troisième petit cube est alors nécessairement au centre. Le reste s'impose de proche en proche. Notons que ce raisonnement non seulement produit une solution, mais montre aussi qu'aux symétries près, il n'y en a qu'une seule.

Les deux autres puzzles de rangement de Conway sont illustrés dans l'encadré 2 avec des indications pour leur solution. Amusez-vous à trouver les raisonnements qui amènent droit vers le rangement complet.

LE PROBLÈME DES DEUX SORCIERS

Dans les années 1960, Conway a imaginé un incroyable problème qui, récemment encore, a donné lieu à des discussions et à la publication d'un article par Tanya Khovanova, du MIT (*voir la bibliographie*). En voici l'énoncé :

« Hier soir, j'étais assis derrière deux sorciers dans un bus et j'ai entendu ce qu'ils disaient :

A : J'ai un nombre entier d'enfants, dont les âges sont des entiers non nuls. La somme de ces âges est le numéro de ce bus, et leur produit est mon propre âge.

B : Comme c'est intéressant ! Peut-être que si vous me disiez votre âge et le nombre de vos enfants, je pourrais calculer chacun de leurs âges ?

A : NON.

B : Parfait, maintenant je sais quel âge vous avez !

La question est : quel est le numéro du bus ? »

Précisons que dans le dialogue, le « non » du sorcier A ne signifie pas qu'il refuse de répondre, mais que la connaissance de son âge et du nombre de ses enfants ne permet pas de connaître individuellement leurs âges. Bien sûr, il faut prendre en compte que le sorcier B connaît le numéro du bus. Précisons encore que les sorciers peuvent être très jeunes ou très vieux : il n'y a aucune impossibilité à envisager que l'âge du sorcier A soit 2 ans ou 20 000 ans.

Voici la solution, que je n'ai pu comprendre et vérifier entièrement qu'en m'aidant d'un programme. Je ne peux pas recopier tous les calculs que nécessite la conclusion, mais vous pouvez croire ce que j'affirme ou... refaire tous les calculs omis.

Notons a l'âge du sorcier A, b le numéro du bus, c le nombre de ses enfants. Supposons par exemple que le numéro du bus soit $b=5$. Les diverses options sont :

• $c=5$ avec pour âges des enfants 1, 1, 1, 1, 1 et donc $a=1$;

3

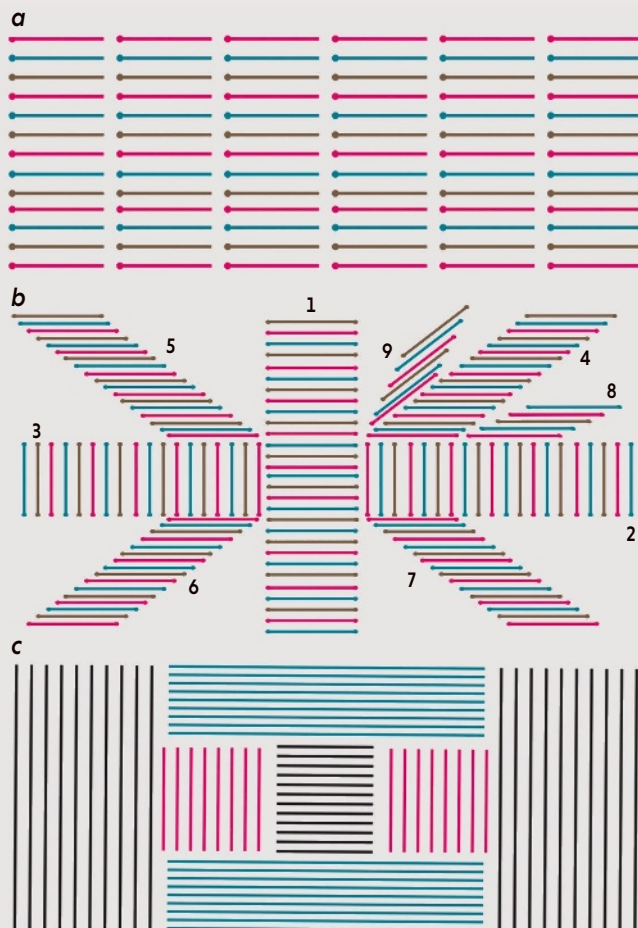
LES PAVAGES FINS

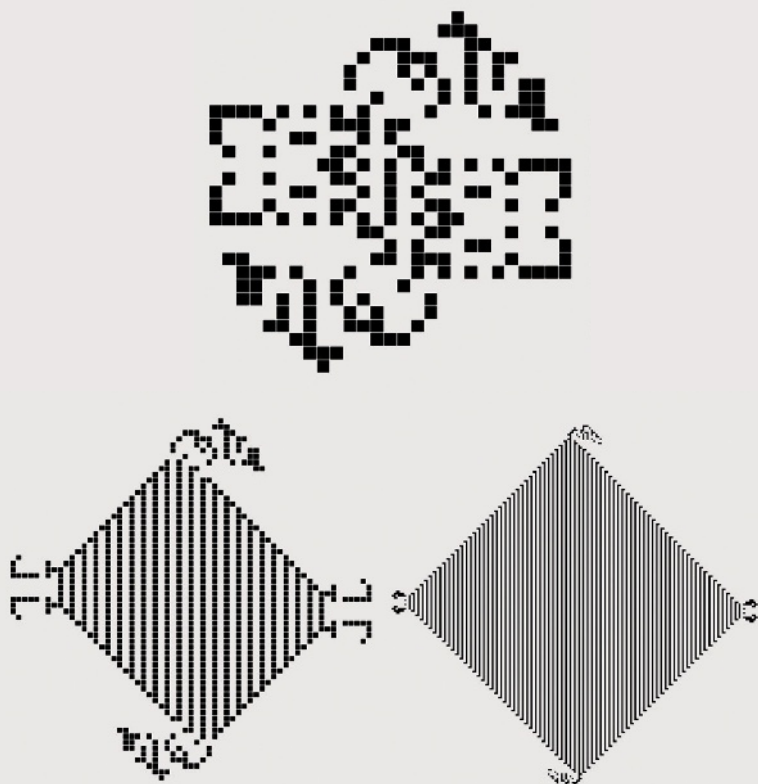
John Conway et Hallard Croft ont conçu des pavages du plan avec des segments de droite. La figure a indique comment on réalise un pavage avec des segments semi-ouverts $[A, B[$ (où le point A est inclus, et le point B est exclu). C'est facile, car, en les mettant bout à bout, on est ramené au pavage évident par des droites.

La figure b illustre la solution pour des segments de même taille fermés $[A, B]$ (où A et B appartiennent au segment). L'empilement 1 est placé en premier. L'empilement 2 est alors ajouté, mais, bien évidemment, le segment le plus à gauche de cette pile n'est pas retenu.

Pour l'empilement 3, on omet de prendre le segment le plus à droite. Pour les piles obliques qu'on ajoute et qui sont de plus en plus fines, à chaque fois le « premier » segment est omis.

La figure c montre une solution pour des segments ouverts $]A, B[$ (où A et B sont exclus), de tailles différentes. Les segments du carré central donnent un carré ouvert (ni les côtés ni les sommets du carré ne sont couverts par ce premier empilement). Chaque rectangle obtenu progressivement lors de l'ajout de nouvelles piles est lui aussi ouvert. Avec des segments ouverts de même longueur, il n'y a pas de solution.





4

UNE NOUVELLE CONFIGURATION DU JEU DE LA VIE

Le Jeu de la vie inventé en 1970 par Conway est toujours étudié et tous les problèmes qu'il pose n'ont pas été résolus. Une case du quadrillage carré du plan infini peut être vivante ou morte ; d'une génération à l'autre, une case passe de l'état vivant (*en noir*) à l'état mort (*en blanc*), ou l'inverse, ou reste stable, en fonction de ses huit cases voisines immédiates qui sont mortes ou vivantes.

La règle d'évolution tient en douze mots : naissance si trois voisines vivantes, survie si deux ou trois voisines vivantes. Certaines configurations ayant peu de cellules vivantes au départ s'étendent infiniment. Au mieux, la croissance du nombre de cellules vivantes augmente proportionnellement à n^2 où n est le numéro de la génération. Au mieux, la densité de cellules vivantes dans une partie stable du plan est $1/2$. Le résultat a été

démonstré sur 29 pages en 1997 par Noam Elkies, de l'université Harvard.

L'extraordinaire configuration figurée en haut a été découverte en avril 2020 par Mateusz Naściszewski (www.conwaylife.com/wiki/Max). C'est la plus petite configuration connue qui, une fois lancée, recouvre avec une croissance quadratique le plan d'une population stable de cellules vivantes de densité $1/2$ (c'est donc le mieux possible en vitesse et en densité). Elle comporte 183 cellules au départ. On a dessiné à des échelles différentes la génération 0, et deux autres générations. On pense qu'il est impossible de faire mieux que 183, mais nul ne sait le démontrer. Notons aussi qu'il existe des configurations qui calculent les nombres premiers ou même qui affichent les unes après les autres des dessins représentant les décimales de $\pi = 3,14159...$

- > • $c=4$ avec pour âges des enfants 1, 1, 1, 2 et donc $a=2$;
- $c=3$ avec pour âges des enfants 1, 1, 3 et donc $a=3$;
- $c=3$ avec pour âges des enfants 1, 2, 2 et donc $a=4$;
- $c=2$ avec pour âges des enfants 1, 4 et donc $a=4$;
- $c=2$ avec pour âges des enfants 2, 3 et donc $a=6$;
- $c=1$ avec pour âges des enfants 5 et donc $a=5$.

Dans chacun des cas possibles, la connaissance de l'âge du sorcier et du nombre de ses enfants permet de connaître leurs différents âges. Puisque A a répondu NON, et que B connaît le numéro du bus, cela signifie que b n'est pas égal à 5.

Pour résoudre le problème, on peut de la même façon prendre les numéros de bus possibles un par un et rechercher ceux qui entraîneront que « la connaissance de l'âge du sorcier et du nombre de ses enfants n'entraîne pas la connaissance de chacun des âges des enfants » (propriété P).

En menant les calculs pour $b=1, 2, 3, \dots, 12$ (comme on vient de le faire pour $b=5$), on découvre que $b=12$ est le plus petit nombre ayant cette propriété P.

En effet pour $b=12$ et $c=4$, on a deux listes d'âges possibles de même longueur pour les enfants, (2, 2, 2, 6) et (1, 3, 4, 4), qui donnent le même âge pour le sorcier A, $a=48$. Il n'existe pas deux autres listes de même longueur et de même produit pour $b=12$. Pour $b=12$, même en sachant que $c=4$ et $a=48$, il est donc impossible de déduire la liste des âges des enfants. Peut-on en déduire que $b=12$ est la solution ?

Malheureusement non. Pour le numéro de bus $b=13$, à cause des listes (1, 6, 6) et (2, 2, 9) qui sont toutes les deux compatibles avec $a=36$, le sorcier B ne peut pas non plus tirer de la connaissance de l'âge de A et du nombre de ses enfants les âges de ces derniers.

Savoir que $b=12$ ne permet pas plus de conclure à l'âge des enfants que savoir que $b=13$. Ceux à qui on pose le problème répondent souvent « $b=12$ » comme si l'énoncé affirmait que la plus petite solution possible pour b était la bonne. Mais ce n'est pas indiqué dans l'énoncé et sans argument supplémentaire, on ne peut pas choisir entre $b=12$ et $b=13$, ni d'ailleurs entre d'autres valeurs pour b comme la poursuite du calcul montre qu'il y en a.

Pourtant $b=12$ est la bonne réponse et sa justification est le côté le plus intéressant et inattendu du problème. Conway a soigneusement rédigé son énoncé et la dernière phrase du sorcier B doit être prise en compte. Après le NON prononcé par A, le sorcier B a ajouté : « Parfait, maintenant je sais quel âge vous avez ! » Cela permet d'éliminer $b=13$.

En effet, pour $b=13$, il y a aussi les deux listes d'âges des enfants (1, 2, 2, 2, 6) et (1, 1, 3, 4, 4) qui donnent l'âge $a=48$. Autrement dit, si le bus avait pour numéro 13, B ne pourrait pas déduire de la réponse négative du sorcier A l'âge de A, car celui-ci pourrait être 36 ou 48. Le numéro de bus $b=13$ est donc à éliminer.

Mais l'élimination de $b=13$ entraîne l'élimination de $b=14$ en considérant les séquences d'âges trouvées pour $b=13$ et en leur ajoutant le nombre 1, ce qui donne (1, 1, 6, 6) et (1, 2, 2, 9) avec $a=36$ d'une part, et (1, 1, 2, 2, 2, 6) et (1, 1, 1, 3, 4, 4) avec $a=48$ d'autre part. Selon le même procédé de l'élimination de $b=14$, on en tire l'élimination de $b=15$ et, de proche en proche, de tous les b supérieurs à 12.

Finalement, seul reste le numéro de bus $b=12$ avec les séquences (2, 2, 2, 6) et (1, 3, 4, 4), qui donnent l'âge du sorcier A: $a=48$.

À la vue de tous les calculs qu'il faut faire pour avoir la solution et dont je n'ai pas recopié le détail qui occupe plusieurs pages, j'avoue que je ne comprends pas comment Conway a pu concevoir ce problème inouï!

PAVAGES DU PLAN PAR DES SEGMENTS DE DROITE

Paver le plan avec des carrés est facile, et il en est de même avec des triangles équilatéraux ou des hexagones. On peut aussi paver le plan avec des droites: il suffit de les placer toutes côte à côte et parallèles. Il y en aura une infinité non dénombrable, mais ce sera un pavage parfaitement satisfaisant, car chaque point du plan appartiendra à une droite du pavage et à une seule. Voici des questions plus délicates:

- Peut-on paver le plan avec des segments fermés, c'est-à-dire des segments de droite $[A, B]$ incluant les extrémités?

- Peut-on paver le plan avec des segments ouverts, c'est-à-dire des segments $]A, B[$ dont on ne retient pas les extrémités?

- Peut-on paver le plan avec des segments semi-ouverts, c'est-à-dire des segments $]A, B]$ dont on ne retient qu'une seule extrémité?

Réfléchissez à ces questions inhabituelles, mais naturelles. Elles ne sont pas si simples. L'encadré 3 donne les solutions. Dans un magnifique article de 1964, Conway abordait avec un collègue (voir la bibliographie) ce type de questions et bien d'autres, prouvant encore une fois que des questions très simples auxquelles personne ne pense sont de belles occasions de faire des mathématiques... pas tout à fait évidentes.

L'INDÉCIDABILITÉ DE LA CONJECTURE DE COLLATZ

Le dernier thème intéresse les mathématiciens amateurs autant que les professionnels. Considérons la fonction f qui, pour les

entiers positifs pairs n donne $n/2$, et qui donne $3n+1$, pour les entiers positifs impairs. Partons de l'entier 7 et appliquons f : on obtient 22, puis en recommençant, 11, puis 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, etc. Une fois que l'on arrive à 1, on tourne en rond.

Quel que soit l'entier n de départ, il semble qu'on finisse toujours par arriver à 1 et à tourner en rond. Des calculs par ordinateur ont testé cette propriété, qui est vraie pour tous les n jusqu'à au moins 87×2^{60} (environ 10^{20}). On n'a cependant pas réussi à prouver que c'est toujours le cas, ni à trouver de n initial qui donnerait une suite allant vers l'infini ou aboutissant à un autre cycle que (4, 2, 1).

Une multitude de travaux ont été consacrés au problème (nommé «conjecture de Collatz» ou «conjecture de Syracuse»), dont plusieurs ont été réunis en un livre (voir la bibliographie). La grande simplicité de l'énoncé du problème attire les amateurs, et je reçois régulièrement des propositions de solutions qui, jusqu'à présent, sont soit fausses soit incompréhensibles.

Conway face à un tel défi, aussi simple à énoncer et qui pourtant résiste depuis plus de quatre-vingts ans à toutes les tentatives de résolution, ne pouvait rester indifférent.

En 1972, il a publié un premier article sur le sujet où il propose des problèmes d'une formulation proche dont il démontre l'indécidabilité. Pour certaines valeurs de l'entier de départ, la suite engendrée par la variante de f ne finit pas par arriver à 1, mais la théorie des ensembles ne peut pas le démontrer. Plus généralement, pour tout système de démonstration S , il existe un problème de cette catégorie et un point de départ qui n'aboutit pas à 1, ce qui n'est pas démontrable avec les moyens de S .

En 2013, Conway est revenu sur la question et a donné des arguments de type probabiliste suggérant que le problème de Collatz lui-même échappe au pouvoir des preuves des systèmes d'axiomes utilisés habituellement en mathématiques. Il ne s'agit pas d'une démonstration définitive de l'indécidabilité de la conjecture de Collatz, mais le type d'arguments qu'il propose semble assez sérieusement indiquer que ce n'est pas un hasard si tout le monde bute sur la résolution de la conjecture.

Tout mathématicien rencontre des problèmes qu'il ne réussit pas à résoudre. Conway n'a pas échappé à cette règle générale, mais ses capacités particulières de logicien lui ont en quelque sorte permis de se consoler en prouvant un résultat d'indécidabilité et en élaborant des arguments suggérant que ce problème, si simple à énoncer et qui lui a résisté, continuerait indéfiniment à résister à tous les mathématiciens. ■

BIBLIOGRAPHIE

J. H. Conway, **On unsetttable arithmetical problems**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 120(3), pp. 192-198, 2013.

T. Khovanova, **Conway's Wizards**, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 35, pp. 18-20, 2013 (<https://arxiv.org/pdf/1210.5460.pdf>).

J. H. Conway, **Unpredictable iterations**, *Proceedings of Number Theory Conference*, Boulder, CO, 1972, pp. 49-52; Repris dans : J. Lagarias (ed.), **The Ultimate Challenge : The $3x + 1$ Problem**, American Mathematical Society, 2010.

J. H. Conway, **The power of mathematics**, dans A. Blackwell & D. MacKay (eds.), *Power*, Cambridge University Press, 2006, pp. 36-50

J. H. Conway et H. T. Croft, **Covering a sphere with congruent great-circle arcs**, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 60(4), pp. 787-800, 1964.