

> mois avant la célèbre expérience de Michelson et Morley de 1887 qui était censée mettre en évidence le mouvement de la Terre par rapport à l'éther, et deux ans avant que l'Irlandais George FitzGerald ne propose, pour expliquer le résultat négatif de l'expérience de Michelson-Morley, la contraction de la longueur des objets dans le sens de leur déplacement. L'approche de Voigt pour obtenir l'expression de l'effet Doppler est encore utilisée dans les manuels d'aujourd'hui.

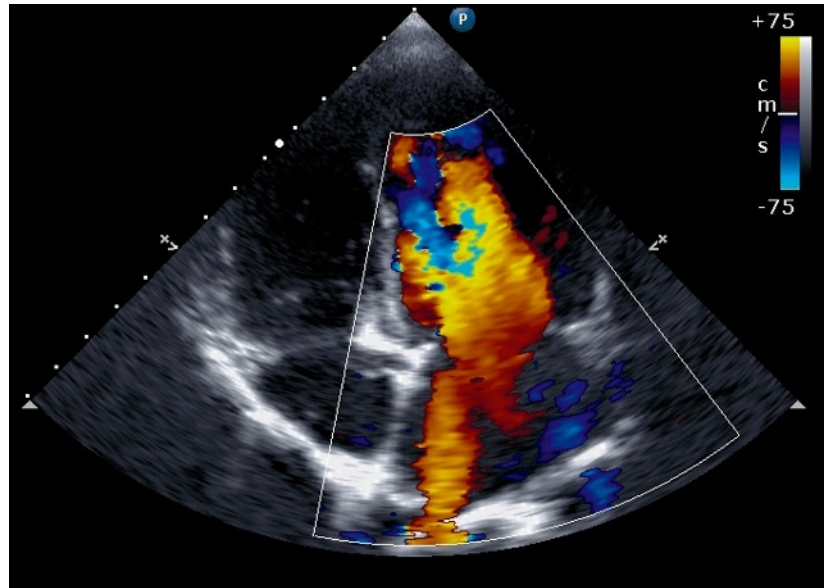
Vingt ans plus tard, Einstein compléta la description relativiste de l'effet Doppler en prédisant l'effet transversal, relatif à une source se déplaçant perpendiculairement à la ligne de visée d'un observateur. Cet effet n'avait été prédit ni par Doppler ni par Voigt.

UNE PLÉTHORE D'APPLICATIONS EN PHYSIQUE, ASTRONOMIE, MÉDECINE...

Près de deux siècles se sont écoulés depuis que Doppler a publié son idée simple fondée sur l'analogie avec un navire qui rencontre une série de vagues océaniques, et l'effet Doppler est aujourd'hui à la base des dispositifs les plus sensibles de mesure optique des systèmes dynamiques. Bien au-delà du radar Doppler des météorologistes, ses applications s'étendent des très petites échelles, avec le refroidissement Doppler des atomes en laboratoire, aux très grandes, avec les mesures par effet Doppler du mouvement d'oscillation des étoiles dans la recherche d'exoplanètes.

Jusqu'au lancement du satellite *Kepler* en 2008, la plupart des exoplanètes avaient été découvertes en détectant les décalages par effet Doppler dus à de petites variations de vitesse radiale lorsqu'une étoile et une exoplanète gravitent autour de leur centre de masse (voir la figure page 77). C'est de cette façon que Michel Mayor et Didier Queloz, de l'Observatoire de Genève, mirent en évidence en 1995 la première exoplanète, en orbite autour de l'étoile 51 Pegasi, ce qui leur a valu le prix Nobel de physique en 2019. On peut ainsi détecter des vitesses radiales aussi faibles que 3 mètres par seconde si on les mesure pendant de nombreuses années.

À plus grande échelle, les courbes donnant la vitesse des étoiles en fonction de leur distance au centre de leur galaxie fournissent parmi les preuves les plus convaincantes de l'existence de la matière noire, et on les obtient par spectroscopie Doppler. On détermine également les vitesses relatives des galaxies elles-mêmes grâce à l'effet Doppler. À une échelle encore plus grande, l'« effet Hubble » est un décalage vers le rouge de nature cosmologique, dû à l'expansion de l'espace plutôt qu'à un véritable effet Doppler. Mais la détermination de la vitesse de la Terre



par rapport au rayonnement du fond diffus cosmologique présent localement, soit 370 kilomètres par seconde, repose sur l'effet Doppler. Par ailleurs, les mouvements locaux dans l'Univers primitif ont conduit, par effet Doppler, à des fluctuations de petite échelle visibles dans le rayonnement du fond diffus cosmologique, anisotropie qui aide à caractériser la distribution de masse dans l'Univers primordial et la fraction qu'y représente la matière noire.

En biologie et en médecine, l'effet Doppler acoustique est utilisé en imagerie par ultrasons (l'échographie), la première démonstration ayant été faite dans les années 1960 pour la mesure du débit sanguin. L'imagerie Doppler des mouvements à l'intérieur du corps, notamment pour le contrôle de la santé cardiaque du fœtus dans le cadre des soins prénataux, est aujourd'hui une technique de routine. Quant à l'effet Doppler optique, il permet en tomographie optique de détecter les directions dans lesquelles le sang circule.

Par ailleurs, les mouvements à l'intérieur des cellules dans les tissus vivants produisent de faibles décalages Doppler, atteignant la dizaine de millihertz pour des vitesses de plusieurs nanomètres par seconde. Or la détection de subtils changements dans les vitesses intracellulaires pourrait aider les médecins à choisir les meilleurs traitements pour les patients atteints de cancer.

Ainsi, l'effet Doppler a permis à son découvreur d'atteindre une forme d'immortalité qu'il n'aurait jamais pu imaginer au moment où il quittait Vienne pour son dernier voyage en Italie – pendant qu'il regardait probablement le clocher de la cathédrale de Saint-Étienne s'éloigner avec un imperceptible décalage vers le rouge de quelques mégahertz. ■

L'échographie Doppler est aujourd'hui une technique d'imagerie médicale répandue, par exemple pour des examens cardiaques (comme sur cette image) ou pour visualiser la circulation sanguine dans les vaisseaux.

BIBLIOGRAPHIE

Z. Li et al., **Doppler fluctuation spectroscopy of intracellular dynamics in living tissue**, *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 36(4), pp. 665-677, 2019.

H. Choi et al., **Biodynamic digital holography of chemoresistance in a pre-clinical trial of canine B-cell lymphoma**, *Biomed. Opt. Express*, vol. 9(5), pp. 2214-2228, 2018.

J. B. Hearnshaw, **The Analysis of Starlight : Two Centuries of Astronomical Spectroscopy**, Cambridge University Press, 2014.

P. M. Schuster, **Moving the Stars : Christian Doppler, His Life, His Works and Principle, and the World After**, Living Edition, 2005.

A. Eden, **The Search for Christian Doppler**, Springer, 1992.

AU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

En cette année du 150^e anniversaire de la naissance de Jean Perrin, prix Nobel de physique, à l'origine de la création du Palais de la Découverte, le prix Jean Perrin 2019 sera décerné à Hélène Fischer, enseignante-chercheuse au sein de l'Institut Jean-Lamour, unité mixte de recherches Université de Lorraine/CNRS à Nancy.

Hélène Fischer est l'auteure de l'exposition *Magnétique* présentée au Palais de la découverte jusque fin 2020. La remise de prix sera suivie de la conférence « Le magnétisme à l'épreuve de la médiation scientifique », par Hélène Fischer.

ORGANISÉ PAR



AVEC LE SOUTIEN DE

SCIENCE

remise du prix Jean Perrin

accès gratuit sur réservation

— 9 octobre à 19h



Palais
DÉCOUVERTE

AU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE

La spintronique succède à l'électronique en utilisant une propriété quantique de l'électron, le spin. Quels retours espérer de ces recherches dans le domaine du stockage des données ?

Stockage des données : l'ère de la spintronique

Hélène Fischer, enseignante chercheuse à l'institut Jean-Lamour, CNRS, université de Lorraine.

Stocker plus, plus vite et plus sobre

Stéphane Mangin, enseignant chercheur à l'institut Jean-Lamour, CNRS, université de Lorraine.

magnétisme : large champ de recherches

conférences

accès gratuit sur réservation

— 10 octobre à 14h

©23RF

AVEC LE SOUTIEN DE SCIENCE

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
P.86 Art & science
P.88 Idées de physique
P.92 Chroniques de l'évolution
P.96 Science & gastronomie
P.98 À picorer

DU FLOU ET DU FAUX EN MATHÉMATIQUES

Les mathématiques sont la plus précise et la plus exacte des sciences... Leur histoire nous montre pourtant de nombreux exemples d'erreurs importantes. Comment limiter les risques d'en produire d'autres?

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite
à l'université de Lille
et chercheur au
laboratoire Cristal
(Centre de recherche
en informatique, signal
et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

En voulant aller vite et aussi loin que possible, les mathématiciens prennent des risques qu'ils ne dominent pas toujours et qui les conduisent parfois à énoncer des théorèmes faux, ou des théorèmes vrais s'appuyant sur des démonstrations fausses. Avec la complexité croissante des domaines abordés, de nouvelles méthodes deviennent nécessaires pour traquer les erreurs.

UNE CRISE DE LA REPRODUCTIBILITÉ

Depuis une quinzaine d'années, divers journaux scientifiques de premier rang ont alerté sur le problème de la reproductibilité en science. En mai 2016, la revue britannique *Nature* publiait une étude où il apparaissait que 70 % des chercheurs qu'elle avait interrogés déclaraient avoir au moins une fois échoué en tentant de reproduire un résultat publié qui les intéressait.

Les mathématiques ne semblaient pas concernées; pourtant, vérifier une démonstration publiée est une forme de « reproduction ». Quand un chercheur propose un résultat et indique sa démonstration, il prétend disposer d'une argumentation le conduisant de manière certaine à la conclusion; lire et contrôler ses affirmations, c'est reproduire cette expérience mentale. Le problème de la reproductibilité concerne donc les mathématiques et on va voir qu'il y est particulièrement délicat.

On pourrait croire que tout mathématicien compétent peut lire tout article de mathématiques et vérifier les démonstrations qui y sont présentées. C'est faux pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, la lecture d'un article mathématique exige souvent une bonne connaissance des concepts, définitions, résultats antérieurs et méthodes du sujet auquel il se rattache. Depuis que l'étendue des domaines mathématiques s'est considérablement accrue au xx^e siècle, chaque chercheur n'est compétent que pour une faible proportion des milliers d'articles de mathématiques publiés chaque année.

Il y a cependant une raison plus profonde qui rend difficile la vérification même pour un spécialiste: une démonstration n'est que l'indication plus ou moins détaillée d'un cheminement argumentatif, avec parfois des passages importants omis ou des raccourcis dangereux.

Pour lire étape par étape une démonstration, il faut ainsi: être très bien informé du domaine; être prêt à travailler longuement sur certains pas du raisonnement qui exigent des calculs non explicités ou le traitement de cas non détaillés; parfois aussi, programmer des vérifications par ordinateur car c'est inconcevable autrement; enfin, dans certains cas, être aussi génial que l'auteur, et en mathématiques il y a d'exceptionnels chercheurs aux capacités au-dessus de la moyenne qui n'ont pas conscience qu'il faut expliquer des points qui leur semblent évidents... et qui ne le sont que pour eux.

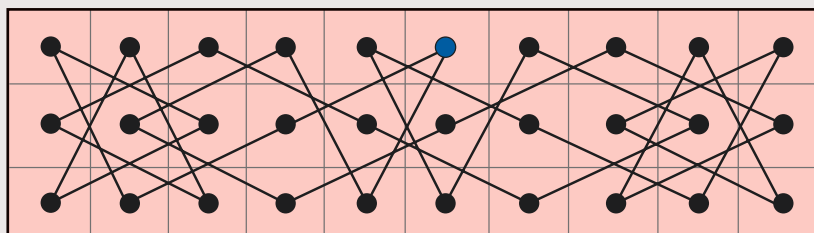
De cette situation, il résulte que de nombreuses erreurs sont commises, publiées et ignorées parfois assez longtemps. Plusieurs livres ont été consacrés aux erreurs en mathématiques, mais on réalise aussi des progrès sensibles pour contrôler et corriger les résultats les plus importants.

LE PARCOURS DU CAVALIER

1

Rechercher si un cavalier du jeu d'échecs peut parcourir toutes les cases d'un damier $m \times n$ sans passer deux fois par la même case et en revenant à son point de départ (parcours fermé) peut sembler un problème de moindre intérêt. Pourtant, on s'y est intéressé depuis le x^e siècle en Inde et Leonhard Euler y consacra un article assez long (« Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres*, vol. 15, pp. 310-337, année 1759, Berlin 1766, <http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E309.pdf>).

Parmi les questions les plus simples qui se posent, il y a celle des échiquiers de taille $3 \times n$. Lorsque n est impair,



il n'y a pas de solution car, plus généralement, il n'y a pas de solution si n et m sont impairs (trouvez-vous pourquoi ?). En revanche, pour tous les nombres pairs n à partir de 10, il y a des solutions (voir la figure ci-dessus) contrairement à ce qu'affirme Euler.

Son erreur ne fut corrigée qu'un siècle et demi plus tard, en 1917, par Ernest Bergholt. Pour ceux que ce type de

problèmes intéresse, le site très complet www.mayhematics.com/t/t.htm est à consulter.

Il est remarquable que le problème suscite encore des travaux mathématiques, par exemple la thèse de master d'Alfred Brown, « Knight's tour and Zeta function », soutenue en 2017 à l'université de l'État de San José, aux États-Unis.

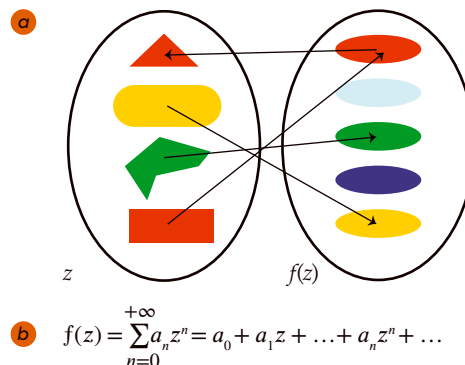
MÉCANIQUEMENT VÉRIFIABLES: LES PREUVES FORMELLES

Il existe plusieurs notions de « preuve formelle » qui, quand elles sont écrites, sont vérifiables mécaniquement, c'est-à-dire par un programme informatique. Malheureusement, ce ne sont pas ces preuves formelles qu'écrivent les mathématiciens dans leurs articles, car elles seraient trop longues et masqueraient les idées importantes dans un fouillis d'arguments logiques et de microcalculs.

Pour David Ruelle, physicien-mathématicien à l'IHES, près de Paris, « les mathématiques humaines consistent en fait à parler de preuves formelles, et non à les écrire réellement. Le mathématicien affirme de manière assez convaincante qu'il existe un certain texte formel aboutissant aux résultats qu'il propose, et qu'il serait possible de l'explicitier totalement, mais il ne le fait pas car ce serait un travail difficile inadapté au cerveau humain, qui n'est pas doué pour vérifier qu'un long texte formel est exempt d'erreurs. Les mathématiques humaines sont une sorte de danse autour d'un texte formel non écrit, qui, s'il était écrit, serait illisible. »

Le problème des erreurs mathématiques n'est pas nouveau, d'autant que les notions de preuve formelle qui permettent de mettre tout le monde d'accord – nous allons y revenir – n'existent que depuis le début du xx^e siècle. Tout au long de son histoire, les mathématiques ont été confrontées aux croyances en des résultats inexacts, ou à l'illusion de tenir une démonstration pour un énoncé vrai, mais qui en réalité n'est pas démontré du fait d'éléments manquants ou faux dans le raisonnement, ou parfois à cause

2



LA NOTION DE FONCTION CHEZ EULER

Plus ennuyeuse que la question du cavalier, où Euler a commis une erreur ponctuelle, la façon dont il a traité le concept de fonction était le centre d'une ambiguïté et même d'une contradiction puisqu'il souhaitait à la fois disposer d'un concept proche de celui de polynôme et énoncer des résultats valables pour une large classe de fonctions, sans réussir à les définir précisément. Ou plutôt en proposant une définition manquant de clarté : « Une fonction est une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes » (*Introductio in analysin infinitorum*, Marcum-Michaellem Bousquet & socios, 1748).

Aujourd'hui, une fonction est définie comme une relation – notion ensembliste précise – qui, à tout point d'un ensemble de départ, en associe un dans l'ensemble d'arrivée (a), sans aucune contrainte particulière. Or les théorèmes de l'analyse qu'Euler s'est appliqué à préciser ne concernent que des classes réduites de fonctions, comme celles développables en série entière (b). On a là un exemple de manque de rigueur apparemment grave qui cependant n'empêche pas les progrès d'un domaine mathématique qui ne devient logiquement parfait que plus tard (voir J. Dhombres, « Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle », *Revue d'histoire des sciences*, vol. 40(2), pp. 179-202, 1987).

> de concepts mal éclaircis comme celui de nombre ou de fonction.

Voici rapidement quelques exemples pris chez les plus grands mathématiciens et qui montrent que personne n'atteint la perfection en mathématiques.

En Grèce, au VI^e siècle avant notre ère, le mystérieux Pythagore soutenait que le rapport de deux grandeurs est toujours équivalent au rapport de deux nombres entiers. Les démonstrations découvertes à son époque de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté, ou en langage moderne de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ont semble-t-il troublé les membres de son école. Notons cependant que les historiens sont unanimes pour considérer que la correction de l'erreur de Pythagore a été l'une des étapes les plus importantes du progrès des mathématiques.

TOUT EST PRESQUE PARFAIT CHEZ EUCLIDE

Deux siècles plus tard environ, Euclide nous a laissé un traité, les *Éléments*, d'une étonnante maturité et d'une rigueur telle qu'aujourd'hui encore nous pouvons lire, comprendre et approuver l'essentiel de ses démonstrations. Pourtant, les lecteurs attentifs d'Euclide ont repéré une série d'omissions, par exemple dans sa formulation des axiomes de la géométrie, ou d'imprécisions rendant fausses ou incomplètes certaines de ses démonstrations. L'utilisation de figures le conduit à des arguments qui ne sont valides que pour une disposition particulière des éléments en présence. Parfois aussi, il considère

comme évidentes des propriétés qu'aujourd'hui nous nous imposons de démontrer, comme l'existence d'un point commun à deux courbes (droites, cercles, etc.) qui se croisent. Ce problème lié à la continuité se pose dès la proposition 1 du livre 1 des *Éléments*, quand Euclide construit avec un compas un triangle équilatéral sur un segment AB donné.

EULER, «NOTRE MAÎTRE À TOUS»

Sautons deux millénaires pour évoquer quelques-uns des génies de l'époque moderne. Le mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) est peut-être le plus grand : il a écrit un nombre considérable de mémoires mathématiques réunis aujourd'hui dans les soixante-dix tomes de ses œuvres complètes (<http://eulerarchive.maa.org>). Il a fait considérablement progresser l'analyse et Pierre-Simon de Laplace conseillait : «Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous.» Pourtant, ce prodigieux mathématicien s'est parfois trompé en indiquant par exemple qu'il n'existait jamais de cheminement fermé d'un cavalier sur un échiquier rectangulaire $3 \times n$ alors qu'il en existe par exemple pour les échiquiers 3×10 (voir l'encadré 1).

La rigueur des raisonnements d'Euler est parfois insuffisante et l'on considère aujourd'hui comme incomplète sa démonstration de 1749 du «théorème fondamental de l'algèbre» sur les racines d'un polynôme. La façon dont il utilise la notion de fonction, qu'il assimile plus ou moins à des polynômes de degré fini ou infini, manque de rigueur et même de clarté (voir l'encadré 2) ; c'est seulement au

3

LES CAUSES DES ERREURS

Aujourd'hui, les raisons de la présence d'erreurs parfois persistantes dans les travaux publiés par les mathématiciens sont multiples et peuvent être classées de la façon suivante.

1) Les procédures de contrôle avant publication sont très imparfaites. Certaines revues cherchent à publier le plus possible et n'exercent pas de filtre sérieux avant d'accepter les articles qu'elles publient. Même quand elles sont très rigoureuses, les revues confient l'expertise à des mathématiciens qui ne sont pas rémunérés

pour leur travail et restent anonymes, ce qui n'est peut-être pas la meilleure façon d'inciter ces experts à un travail approfondi de vérification.

2) Certains domaines sont très spécialisés et les travaux publiés ne sont connus que de très peu de chercheurs et donc très peu contrôlés ou pas du tout après leur publication. Une erreur présente dans un article pourra donc rester ignorée longtemps.

3) Certains domaines donnent lieu à des démonstrations extrêmement longues et terriblement difficiles,

qui nécessitent un travail considérable de contrôle. Cet examen ne peut être fait sérieusement qu'avec l'aide d'assistants informatiques de preuve, ce qui, pour certaines démonstrations, est encore difficile. Ainsi, il a fallu plusieurs années pour formaliser et valider la preuve par Thomas Hales de la démonstration de la conjecture de Kepler sur l'empilement le plus compact des sphères dans l'espace.

xix^e siècle que l'on saura reprendre son précieux travail sur ces sujets et les mettre parfaitement en ordre.

Nous ne reviendrons pas sur le cas d'Augustin Cauchy et de son célèbre énoncé affirmant à tort qu'une limite de fonctions continues est aussi une fonction continue (<http://fredrickey.info/hm/CalcNotes/CauchyWrgPr.pdf>), ni sur Henri Poincaré et son mémoire faux qui lui valut le prix en l'honneur du roi Oscar de Suède (<https://journals.openedition.org/lettre-cdf/1103>) et qu'il fit réimprimer à ses frais après correction.

David Hilbert, lui aussi considéré comme l'un des plus grands mathématiciens et logiciens, a laissé un grand nombre de petites erreurs dans ses articles. Lorsqu'on décida, pour publier ses œuvres complètes, de les nettoyer de tout ce qui devait être remis sur pied, trois ans furent nécessaires à Olga Taussky-Todd pour réaliser le travail. Hilbert se trompa aussi une fois gravement en proposant une démonstration erronée de l'« hypothèse du continu », selon laquelle il n'y a pas d'infini intermédiaire entre celui des entiers et celui des nombres réels.

ÉCRIRE LES DÉMONSTRATIONS DANS LE LANGAGE DE LA LOGIQUE

Le développement de la logique a abouti au début du xx^e siècle à l'idée qu'une démonstration mathématique correcte peut être contrôlée mécaniquement, à condition de l'écrire dans un langage dont les premières esquisses furent proposées par Alfred Whitehead et Bertrand Russell dans les trois volumes des *Principia Mathematica* (1910-1913). En complétant légèrement la méthode des *Principia* dont la syntaxe de base n'est pas totalement fixée, on aboutit à la notion de « système formel » aujourd'hui au cœur de la logique mathématique. C'est elle qui donne son sens plein aux célèbres théorèmes d'incomplétude de Kurt Gödel, affirmant qu'aucun système formel ne sera jamais assez puissant pour toutes les mathématiques et qu'il sera donc toujours nécessaire de rechercher de nouveaux axiomes.

La précision absolue rendue possible par les systèmes formels aurait dû mettre fin aux erreurs en mathématiques. Ce n'était qu'illusion, car il est très difficile en pratique d'écrire ces textes mécaniquement vérifiables et qui fournissent d'absolues certitudes. Aujourd'hui, on a conçu des programmes informatiques, des « assistants de preuve », qui mettent au point ces preuves. Ces systèmes ne trouvent pas seuls de nouvelles démonstrations, mais aident les mathématiciens à écrire des démonstrations incontestables.

Grâce à eux, on a formalisé une part importante des mathématiques de base, ce qui >

4

LES ASSISTANTS DE PREUVE CORRIGENT LES ERREURS

Les systèmes informatiques dénommés « assistants de preuve » permettent aux mathématiciens d'écrire des démonstrations formelles, donc parfaitement complètes sans qu'aucune erreur ne puisse subsister. Ces logiciels ont-ils permis de corriger des erreurs passées inaperçues ? Dans certains cas oui (voir le cas de la preuve ontologique de Gödel dans le texte de l'article). Manuel Eberl est un expert qui travaille depuis des années à écrire des démonstrations en utilisant l'assistant de preuves Isabelle/HOL. Il témoigne de son travail :

« Normalement, il faut une compréhension très approfondie d'une preuve sur papier pour la formaliser et il faut réfléchir à la façon de s'y prendre pour la formaliser. [...] Si vous formalisez une démonstration particulière comme celle du théorème des nombres premiers [...], vous ne découvrirez probablement pas que tout est faux et que tout s'effondre, mais vous rencontrerez des petits problèmes.

J'ai trouvé des "erreurs" dans de nombreuses démonstrations, y compris quand elles étaient publiées dans des manuels scolaires ou des articles. La plupart de ces erreurs sont faciles à corriger et la plupart des mathématiciens les considéreraient probablement comme sans gravité. Certaines sont identifiées en quelques jours, d'autres nécessitent en fait de changer les définitions, d'ajouter des hypothèses ou de modifier l'énoncé du théorème. La plupart des "erreurs" entrent dans les catégories suivantes.

- Des arguments étonnamment non triviaux sont déclarés faciles et sans importance. [...]
- Des cas sont omis.

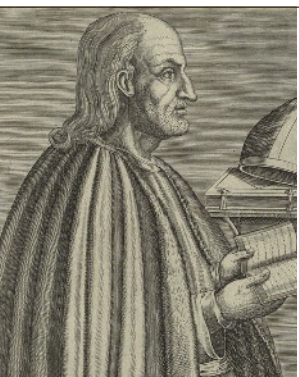
- Des erreurs arithmétiques sont commises, comme multiplier les deux côtés d'une inégalité par une constante dont on ne vérifie pas qu'elle est positive.
- Des hypothèses non indiquées sont utilisées subrepticement.

Je suis conscient que les mathématiciens ont souvent un point de vue indulgent. [...] Les types d'erreurs que je mentionne sont en général jugés insignifiants, et on pense que quelqu'un les aurait corrigées même en l'absence d'un système informatique, et donc que finalement les théorèmes et démonstrations incriminés sont corrects en un sens, puisque les problèmes identifiés sont mineurs.

Cependant, je ne suis pas d'accord avec cela. Je veux que mes démonstrations soient aussi rigoureuses que possible. Je veux être certain de n'avoir manqué aucune hypothèse. » (Pour le texte complet de Manuel Eberl, voir : <https://mathoverflow.net/questions/291158/proofs-assistant/312661>)



Manuel Eberl est chercheur à l'université technique de Munich, en Allemagne.



LA PREUVE ONTOLOGIQUE

5

Saint Anselme de Cantorbéry (1033-1109) (ci-dessus à gauche), puis Gottfried Leibniz (1646-1716) (au milieu), puis le logicien autrichien Kurt Gödel (1906-1978) (à droite) ont chacun à leur tour proposé des raisonnements utilisant uniquement des considérations logiques pour conclure que Dieu existe.

Le raisonnement ontologique d'Anselme dans sa version grossière est : « Dieu possède toutes les qualités, donc la qualité d'existence, donc Dieu existe. » Un peu plus précisément : « Dieu, par définition, est ce dont on ne peut rien concevoir de plus grand. Dieu existe dans l'entendement humain. Si Dieu existe dans l'entendement humain, nous pouvons l'imaginer plus grand, considérant qu'il existe aussi dans la réalité. Par conséquent, Dieu existe. »

Une version plus élaborée a été donnée par Leibniz et c'est elle que Gödel a tenté encore de perfectionner. Ces versions sont plus complexes et utilisent des notions de logique modale (comme « il est nécessaire », « il est possible », etc.), logiques dont des versions formelles ont été proposées et étudiées dès 1918 par Clarence Lewis, puis approfondies tout au long du xx^e siècle.

La validité de ces raisonnements repose sur l'acceptation individuelle des axiomes et définitions de départ qu'on peut

discuter à l'infini. Elle dépend aussi de la validité des raisonnements quand on a admis les axiomes et définitions. Cette validité est contrôlable grâce aux outils informatiques dont on dispose aujourd'hui. Cependant, même si on accepte individuellement les axiomes et que le raisonnement est jugé correct, il se peut encore que les axiomes soient globalement insatisfaisants parce que conduisant à des absurdités manifestes. C'est ce qui s'est produit pour le raisonnement proposé par Gödel.

En février 1970, pensant qu'il était mourant, Gödel a autorisé le mathématicien Dana Scott (né en 1932) à copier la dernière version de son raisonnement. Un peu plus tard, Gödel a affirmé à son ami le mathématicien et économiste Oskar Morgenstern (1902-1977) qu'il était satisfait de sa preuve, en précisant qu'il ne voulait pas la publier parce qu'il avait peur qu'on en déduise qu'il croyait en Dieu, alors qu'il était seulement engagé dans une exploration logique.

Récemment, Christoph Benz Müller, de l'université libre de Berlin, et Bruno Woltzenlogel Paleo, de l'université nationale australienne, ont montré, en utilisant des assistants de preuve, que le système utilisé par Gödel était absurde (voir leur article cité dans la bibliographie).

> confirme que nous ne devons avoir aucune inquiétude concernant la partie centrale des mathématiques. Pour les théorèmes les plus difficiles, dont les démonstrations sont très longues ou mettent en œuvre des concepts abstraits et délicats, on ne dispose pas encore de ces versions formalisées.

DES ÉNONCÉS PROUVÉS FORMELLEMENT...

Parmi les énoncés dont les preuves ont été contrôlées ainsi, on a par exemple :

- Il existe exactement cinq solides platoniciens (polyèdres réguliers convexes).
- Impossibilité de la trisection d'un angle à la règle et au compas.
- Indépendance du postulat des parallèles vis-à-vis des autres axiomes de la géométrie de base du plan.
- Théorème fondamental de l'algèbre sur les racines des polynômes.
- Théorème des valeurs intermédiaires concernant les fonctions continues de l'ensemble des nombres réels dans lui-même.
- Théorème des deux carrés: un entier est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers, de la forme $4k+3$, intervient avec un exposant pair.
- Théorème fondamental de l'analyse: la dérivée par rapport à x de l'intégrale de la fonction f , prise entre une constante a et x , est égale à $f(x)$.
- Théorème de Liouville: le nombre $1/10^{1!} + 1/10^{2!} + 1/10^{3!} + \dots$ est transcendant.
- Les nombres e et π sont transcendants.
- Théorème des nombres premiers: la densité des nombres premiers autour de n est $1/\log(n)$.
- Procédé diagonal de Cantor: les nombres réels ne peuvent se mettre en bijection avec les nombres entiers.
- Premier théorème d'incomplétude de Gödel.
- Théorème des quatre couleurs: toute carte géographique dessinée sur un plan peut être coloriée avec quatre couleurs de façon que deux pays voisins soient de couleurs différentes.
- Conjecture de Kepler sur l'empilement le plus dense de sphères dans l'espace.

... ET D'AUTRES NON

Les résultats suivants n'ont pas été contrôlés par des assistants de preuve, mais pour les deux premiers, les spécialistes sont d'accord pour considérer que la démonstration informelle disponible est satisfaisante.

- Le théorème de Fermat qui indique que l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'a pas de solutions en nombres entiers positifs si $n > 2$.
- Le théorème géant concernant la classification des groupes finis simples, dont la démonstration actuelle occupe des dizaines de milliers de pages dispersées dans plus de cinq cents articles. On tente d'écrire une