

DURÉE LIBRE

3 FORMULES AU CHOIX

BULLETIN D'ABONNEMENT

À renvoyer accompagné de votre règlement à :

Next2C – Service abonnements Pour La Science – 26 Bd Président Wilson - CS40032 – 67085 Strasbourg Cedex – email: pourlascience@abopress.fr

☒ **OUI, je m'abonne à Pour la Science en prélèvement automatique**

PAG20NOE

1 / Je choisis ma formule (merci de cocher) et je complète l'autorisation de prélèvement ci-dessous.

☐

FORMULE PAPIER

- 12 n° du magazine papier

+ **UN CADEAU**

DPV4E90K8

4,90€

PÂR MOIS

☐

FORMULE PAPIER + HORS SÉRIE

- 12 n° du magazine papier
- 4 Hors-série papier

+ **UN CADEAU**

PPV6E50K15

6,50€

PÂR MOIS

☐

FORMULE INTÉGRALE

- 12 n° du magazine (papier et numérique)
- 4 Hors-série (papier et numérique)
- Accès illimité aux contenus en ligne

+ **UN CADEAU**

IPV8E20K15

8,20€

PÂR MOIS

2 / Mes coordonnées

Nom:
Prénom:
Adresse:
.....
Code postal

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Ville:
Tél.:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

E-mail:@
(Indispensable pour la formule intégrale)
J'accepte de recevoir les offres de Pour la Science ☐ OUI ☐ NON

Durée d'abonnement : 1 an. Délai de livraison : dans le mois suivant l'enregistrement de votre règlement. Offre valable jusqu'au 31/03/2021 en France métropolitaine uniquement. Pour un abonnement à l'étranger, merci de consulter notre site <https://boutique.pourlasience.fr>. Photos non contractuelles. Vous pouvez acheter séparément chaque élément de cette offre : les numéros de *Pour la Science* pour 6,90 €, les numéros de *Pour la Science Hors-série* pour 7,90 € et le livre *Pourquoi le Soleil brille* pour 16,00 €.

Les informations que nous collectons dans ce bulletin d'abonnement nous aident à personnaliser et à améliorer les services que nous vous proposons. Nous les utiliserons pour gérer votre accès à l'intégralité de nos services, traiter vos commandes et paiements, et nous faire part notamment par newsletters de nos offres commerciales moyennant le respect de vos choix en la matière. Le responsable du traitement est la société *Pour la Science*. Vos données personnelles ne seront pas conservées au-delà de la durée nécessaire à la finalité de leur traitement. *Pour la Science* ne commercialise ni ne loue vos données à caractère personnel à des tiers. Les données collectées sont exclusivement destinées à *Pour la Science*. Nous vous invitons à prendre connaissance de notre charte de protection des données personnelles à l'adresse suivante : <https://rebrand.ly/charte-donnees-pls>. Conformément à la réglementation applicable (et notamment au Règlement 2016/679/UE dit «RGPD») vous disposez des droits d'accès, de rectification, d'opposition, d'effacement, à la portabilité et à la limitation de vos données personnelles. Pour exercer ces droits (ou nous poser toute question concernant le traitement de vos données personnelles), vous pouvez nous contacter par courriel à l'adresse protection-donnees@pourlascience.fr.

Groupe Pour la Science - Siège social: 170 bis, boulevard du Montparnasse, CS20012, 75680 Paris cedex 14 – Sarl au capital de 32 000€ – RCS Paris B 311 797 393 – Siret : 311 797 393 000 23 – APE 5814 Z

3 / Mandat de prélèvement SEPA

En signant ce mandat SEPA, j'autorise Pour la Science à transmettre des instructions à ma banque pour le prélèvement de mon abonnement dès réception de mon bulletin. Je bénéficie d'un droit de rétractation dans la limite de 8 semaines suivant le premier prélèvement. Plus d'informations auprès de mon établissement bancaire.

TYPE DE PAIEMENT : PAIEMENT RÉCURRENT

Titulaire du compte

Nom: Prénom:

Adresse:

Code postal Ville:

Désignation du compte à débiter

BIC (Identification internationale de la banque) _____

IBAN

(Numéro d'identification international du compte bancaire)

Établissement teneur du compte

Nom:

Adresse:

Code postal : Ville :

Date et signature

Organisme Créancier: Pour la Science
170 bis, bd. du Montparnasse – 75014 Paris
N° ICS FR92ZZZ426900
N° de référence unique de mandat (RUM)

N° de référence unique de mandat (RUM)

4 / MERCI DE JOINDRE IMPÉRATIVEMENT UN RIB

Partie réservée au service abonnement Ne rien inscrire

R

ENDEZ-VOUS

P.80 Logique & calcul
 P.88 Idées de physique
 P.92 Chroniques de l'évolution
 P.96 Science & gastronomie
 P.98 À picorer

DES FONCTIONS MONSTRUEUSES MAIS UTILES

En imaginant des fonctions bizarres et au comportement inhabituel, les mathématiciens mettent à l'épreuve leurs intuitions. Ces fonctions se révèlent aussi pertinentes pour modéliser certains phénomènes naturels.

L'AUTEUR



JEAN-PAUL DELAHAYE
 professeur émérite
 à l'université de Lille
 et chercheur au
 laboratoire Cristal
 (Centre de recherche
 en informatique, signal
 et automatique de Lille)



Jean-Paul Delahaye a notamment publié : **Les Mathématiciens se plient au jeu**, une sélection de ses chroniques parues dans *Pour la Science* (Belin, 2017).

Les mathématiciens ont longtemps associé l'idée de continuité d'une fonction (et de son graphe) et l'existence de tangentes aux points de son graphe, et ils pensaient que ces tangentes existaient partout hormis en quelques points isolés quand la fonction est continue. André-Marie Ampère tenta en 1806 de le démontrer, mais échoua. En fait, l'hypothèse était fautive : il existe des fonctions continues dont le graphe n'a de tangente en aucun point !

Au début, ces fonctions « monstrueuses » ont gêné les mathématiciens. Ainsi, en 1893, Thomas Stieltjes écrivait à Charles Hermite : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui sont sans dérivée. » Henri Poincaré lui-même n'aimait pas ces fonctions tératologiques et les considérait comme un jeu stérile et irrespectueux des traditions : « La logique parfois engendre des monstres. On a vu surgir toute une foule de fonctions bizarres qui semblaient s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées. [...] Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique ; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela. »

Le jugement des mathématiciens a bien changé ! Ils considèrent aujourd'hui que ces fonctions inattendues sont des garde-fous utiles,

car non seulement connaître leur existence nous évite de tenter des démonstrations impossibles, mais elles affinent notre compréhension des concepts de continuité et de dérivabilité.

De plus, ces fonctions monstrueuses sont à l'origine de la géométrie fractale, qui sert à modéliser toutes sortes de phénomènes naturels, le mouvement brownien par exemple. Finalement nous savons maintenant que ces « monstres » sont présents dans l'univers physique et ne sont en rien artificiels. Nous allons en présenter quelques-uns pour le plaisir de l'étonnement.

DISCONTINUITÉ MAXIMALE

La notion de continuité s'envisageait d'abord globalement. Par exemple, les fonctions $x \rightarrow x^2$ ou $x \rightarrow \sin(x)$ sont continues partout où elles sont définies, c'est-à-dire sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Pourtant, en approfondissant notre compréhension, on a découvert que la continuité était une notion ponctuelle : on peut définir la continuité en un point, et en chaque point de son ensemble de définition une fonction peut être continue ou non.

Nous nous limiterons aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et distinguerons parmi les nombres réels les nombres rationnels, de la forme p/q où p et q sont des entiers, comme $0,4=2/5$, et les nombres irrationnels qui ne peuvent se représenter sous cette forme, comme $\sqrt{2}$. La façon la plus simple de définir la continuité est de dire que f est continue au point x si, à chaque fois que >

LA FONCTION POP-CORN DE THOMAE ET LE VERGER D'EUCLIDE

1

La fonction pop-corn g du mathématicien allemand Carl Thomae est définie pour tout nombre réel x par :

- (1) $g(x) = 0$ si x est irrationnel ;
- (2) si x est rationnel, c'est-à-dire si $x = p/q$ avec p et q entiers sans diviseur commun autre que 1, alors $g(x) = 1/q$.

Cette fonction saute sans cesse de valeurs positives à des valeurs nulles et inversement. Cependant, quand x est proche d'un nombre irrationnel, les fractions p/q ne peuvent pas avoir un petit dénominateur, et donc $1/q$ est de plus en plus petit. En effet, près d'un irrationnel x , arrive un moment où un rationnel ne peut avoir un dénominateur 2, car x se trouve à la fois éloigné de 0, $1/2$, 1, $3/2$, etc. De même, arrive un moment où un

rationnel ne peut avoir pour dénominateur 3, etc. Donc quand une suite de rationnels s'approche d'un irrationnel, les dénominateurs augmentent.

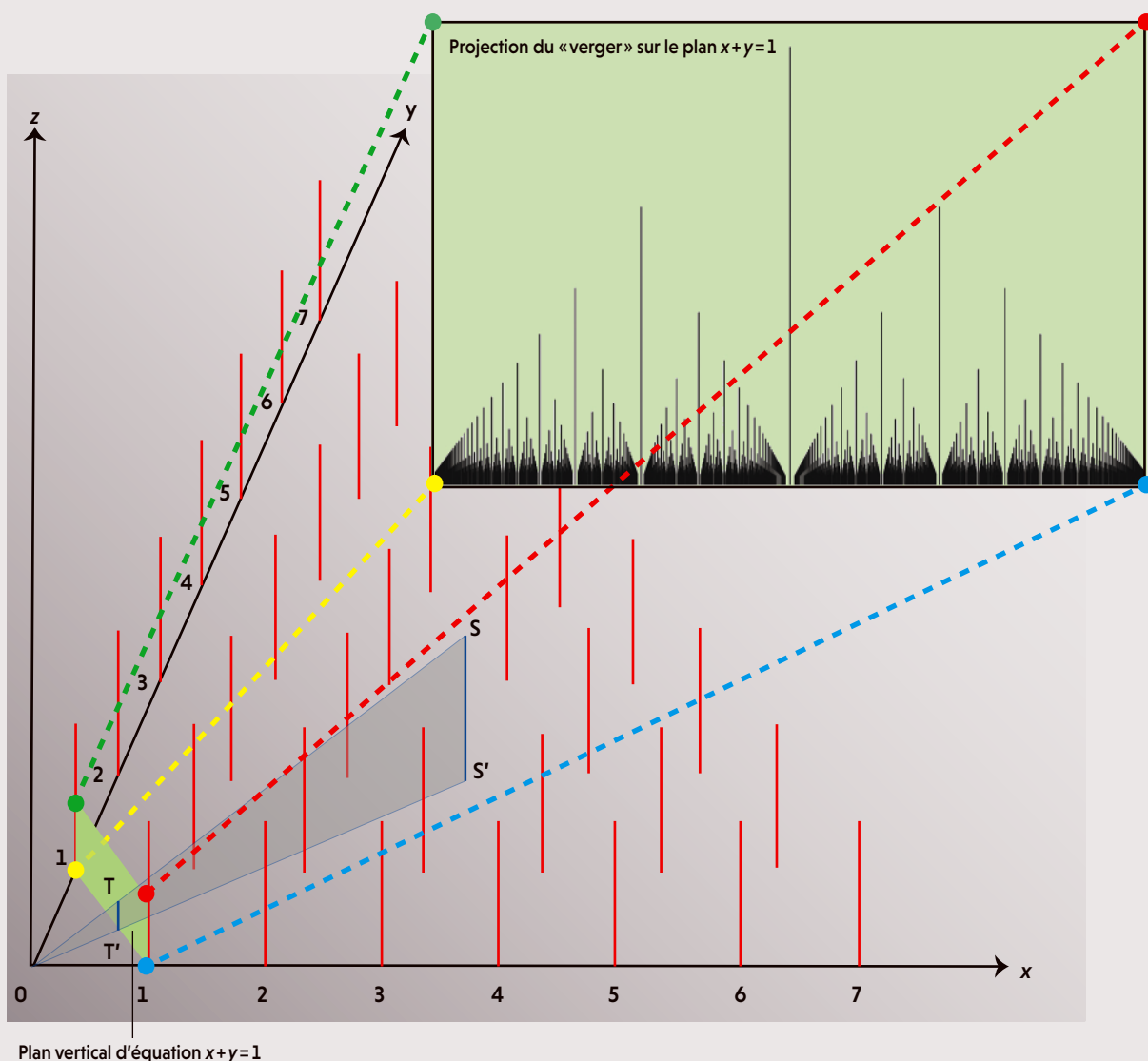
La conséquence est que g est continue en x si x est irrationnel. La fonction g passe donc sans cesse de points où elle est continue (les irrationnels) à des points où elle est discontinue (les rationnels) et inversement.

On rencontre cette fonction en physique et en géométrie. Le « verger d'Euclide » est un plan infini couvert d'arbres (des segments de longueur 1) placés verticalement aux points de coordonnées (p, q) du plan $z = 0$. Projeteons chaque segment-arbre SS' sur le plan vertical d'équation $x + y = 1$ par une homothétie de

centre $(0, 0)$ et de rapport $p + q$. La longueur de la projection TT' de l'arbre SS' est $1/(p + q)$.

Tout couple d'entiers positifs (p, q) peut s'écrire sous la forme $(n, m - n)$, n et m positifs, en prenant $n = p$ et $m = p + q$. Donc, en considérant tous les arbres du verger d'Euclide en position $(n, m - n)$, on a bien tous les arbres et la projection de tous ces arbres sur le plan $x + y = 1$ donne tous les points du graphe de la fonction $g(x)$, la hauteur $1/m$ de l'arbre étant la valeur de la fonction g pour les x rationnels. Les points du graphe de g pour les x irrationnels sont sur l'axe des x .

Regarder le verger d'Euclide sur le plan d'équation $x + y = 1$ est donc équivalent à regarder le graphe de la fonction g de Carl Thomae !



- l'on dispose d'une suite (x_n) qui converge vers x , alors $f(x_n)$ converge vers $f(x)$: si y s'approche de x , alors $f(y)$ s'approche de $f(x)$. Puisque la notion est définie en tout point, vient la question : se peut-il qu'une fonction soit l'opposée d'une fonction continue en tout point, c'est-à-dire qu'elle ne soit continue en aucun point ?

Oui, c'est possible. Si l'on considère la fonction f définie par $f(x)=1$ si x est rationnel, $f(x)=0$ si x est irrationnel, on en a un exemple. Cette fonction est nommée « fonction de Dirichlet » en l'honneur du mathématicien prussien Gustav Lejeune Dirichlet qui l'envisagea en 1829. Elle n'est pas continue en x si x est rationnel, car $f(x)=1$ et donc en s'approchant de x par des y irrationnels, $f(y)$ vaut 0 et ne s'approche pas de $f(x)$. Et elle n'est pas continue en x si x est irrationnel car $f(x)=0$, donc en s'approchant de x par des rationnels y , $f(y)$ qui vaut 1 ne s'approche pas de $f(x)$. La fonction saute sans cesse de 0 à 1 et de 1 à 0, car entre deux rationnels il y a toujours des irrationnels, et entre deux irrationnels, il y a toujours des rationnels.

On dit qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si tout point de $\mathbb{R}$ peut-être approché avec autant de précision qu'on le veut

par des points de E . L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$, mais c'est aussi le cas de son complémentaire, l'ensemble des irrationnels. Il en va de même pour l'ensemble des nombres décimaux (ceux dont l'écriture en base 10 est finie, comme 0,25 ou 7,4321). Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$, et si le complémentaire de E est lui aussi dense dans $\mathbb{R}$, alors toute fonction qui vaut 1 sur E et 0 ailleurs sera, comme la fonction de Dirichlet, discontinue partout.

UNE FONCTION CONTINUE EN TOUT POINT IRRATIONNEL ET DISCONTINUE AILLEURS

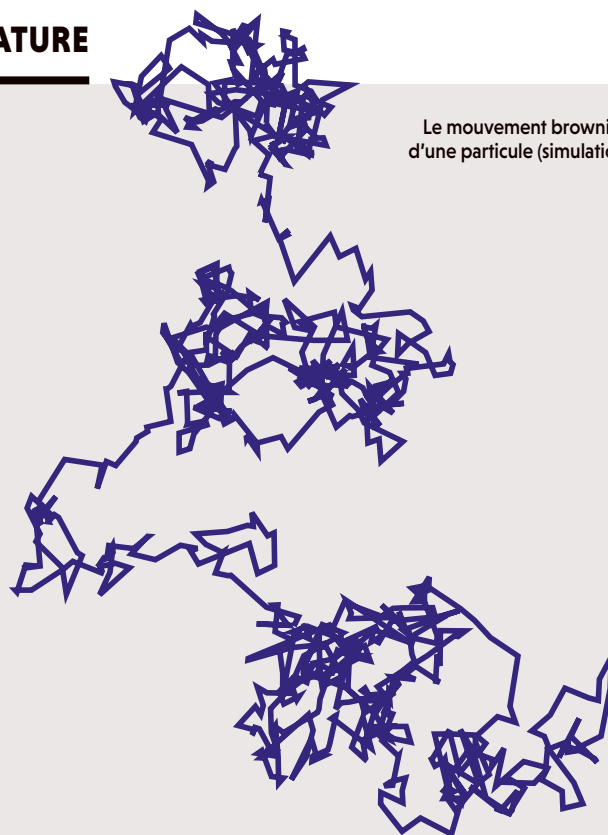
Une seconde question un peu plus subtile va produire un résultat vraiment surprenant : les points où une fonction est continue sont-ils groupés ? On pourrait penser que oui, mais c'est faux. En effet, il existe une fonction g qui est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel. Elle saute sans cesse de la continuité à la non-continuité. Entre deux points où cette fonction g est continue, aussi proches soient-ils, il y a toujours un point où la fonction est discontinue, et inversement.

2

DES MONSTRES RENCONTRÉS DANS LA NATURE

Les fonctions monstrueuses ont étonné les mathématiciens du XIX^e siècle qui les ont découvertes, et parfois détestées car elles semblaient ne pas se plier à ce qu'on attend des bonnes fonctions rencontrées dans la nature. Cependant, même si au départ ces fonctions tératologiques servaient uniquement en mathématiques à comprendre ce qui résulte des définitions et ce qui n'en résulte pas, on s'est aperçu dans un second temps qu'elles sont aussi utiles pour modéliser le monde physique. Jean Perrin fut le premier, en 1913, à percevoir et défendre cet intérêt : « Si les fonctions à dérivée sont les plus simples, les plus faciles à traiter, elles sont pourtant l'exception. Ou, si l'on préfère en langage géométrique, les courbes qui n'ont pas de tangente sont la règle, et les courbes bien régulières, telles que le cercle, sont des cas fort intéressants mais très particuliers. [...] Mettant l'œil au microscope, nous observons le mouvement brownien qui agite une toute petite particule en suspension dans un fluide. Pour fixer une tangente à sa trajectoire, nous devrions trouver une limite au moins approximative à la direction de la droite qui joint les positions de cette particule en deux instants successifs très rapprochés. Or, tant que l'on peut faire l'expérience, cette direction varie follement lorsque l'on fait décroître la durée qui sépare ces deux instants. En sorte que ce qui est suggéré par cette étude à l'observateur sans préjugé, c'est encore la fonction sans dérivée, et pas du tout la courbe avec tangente. »

Benoît Mandelbrot a défendu cette idée d'une géométrie incluant ces courbes irrégulières sans tangente et il a démontré qu'on en rencontrait partout, en physique, en économie, en biologie...



Le mouvement brownien
d'une particule (simulation)

3

L'ESCALIER DU DIABLE

La fonction g qui réalise cet exploit a été proposée en 1875 par le mathématicien allemand Carl Johannes Thomae. Parfois dénommée « fonction pop-corn » à cause du dessin de son graphe (voir l'encadré 1), elle est définie par :

$g(x) = 0$ si x est irrationnel ;

$g(x) = 1/q$ si x est rationnel avec $x = p/q$, où p et q sont des entiers sans diviseur commun autre que 1.

Autrement dit, quand x est rationnel, pour trouver q , on simplifie d'abord le plus possible x . Voici deux exemples : $g(6/9) = g(2/3) = 1/3$; $g(80/100) = g(8/10) = g(4/5) = 1/5$.

La continuité en x irrationnel est facile à comprendre :

a) Quand tous les y_n sont irrationnels et que les valeurs y_n s'approchent d'un nombre irrationnel x , il y a continuité puisque $g(y_n) = 0 = g(x)$.

b) Quand tous les y_n sont rationnels (donc de la forme p/q) et s'approchent d'un nombre irrationnel x , alors plus y est proche de x , plus il faut utiliser des fractions ayant un grand dénominateur q , et donc $g(p/q) = 1/q$ tend vers 0.

c) Quand y s'approche d'un nombre irrationnel x en utilisant à la fois des rationnels et des irrationnels, on a pour $g(y)$ un mélange de 0 et de $1/q$ qui tendent vers 0, et donc $g(y)$ tend vers 0.

Quant à la discontinuité de g en un point rationnel $x = p/q$, elle est évidente, car $g(x) = 1/q > 0$ et il y a, aussi près de x qu'on le souhaite, des irrationnels y pour lesquels $g(y) = 0$.

La fonction de Thomae paraît artificielle. Ce n'est pourtant pas le cas, car c'est son graphe que l'on voit quand on regarde le « verger d'Euclide ».

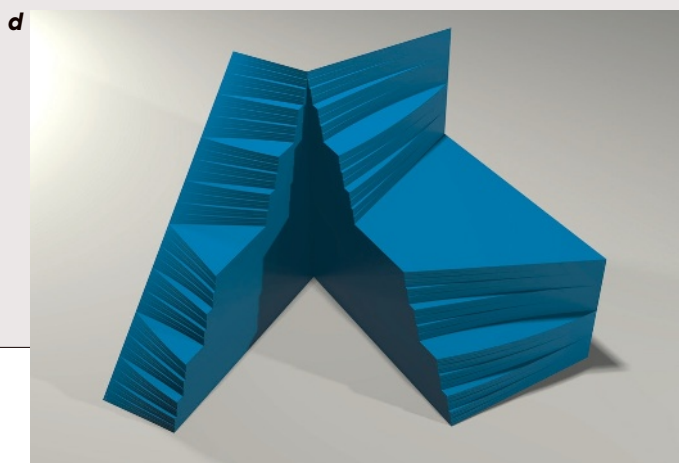
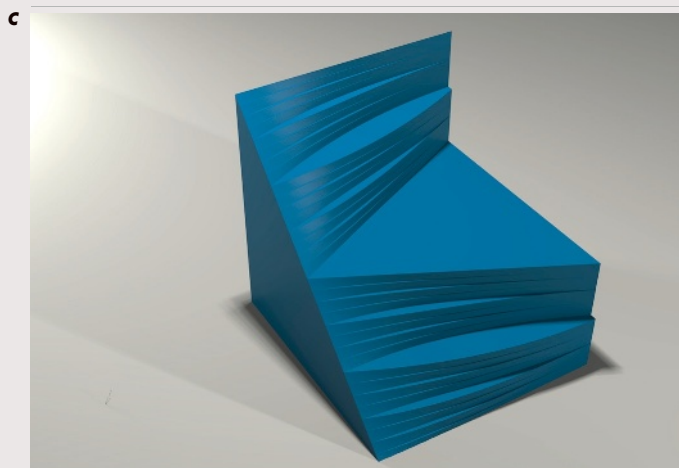
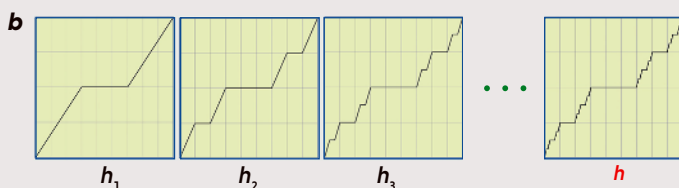
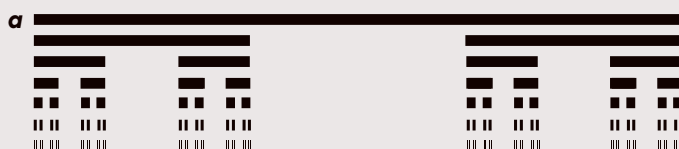
Ce verger est l'idée mathématique d'un champ infini planté d'arbres régulièrement espacés de même hauteur : en chaque point à coordonnées entières, il y a un arbre modélisé par un segment de droite verticale de longueur 1, le bas du segment étant sur le plan horizontal d'altitude 0. Imaginons que l'on place l'œil au niveau du sol au point (0, 0) et que l'on regarde le verger d'Euclide. Certains arbres en cachent d'autres. Par exemple, l'arbre en (1, 1) cache l'arbre en (2, 2), l'arbre en (3, 3), etc. En fait, les seuls arbres que l'on voit sont ceux positionnés en (p, q) où p et q sont sans diviseur commun autre que 1. Ce que l'on voit en projetant sur le plan vertical perpendiculaire à la première diagonale (ce plan a pour équation $x + y = 1$) est alors le graphe de la fonction g de Thomae (voir l'encadré 1).

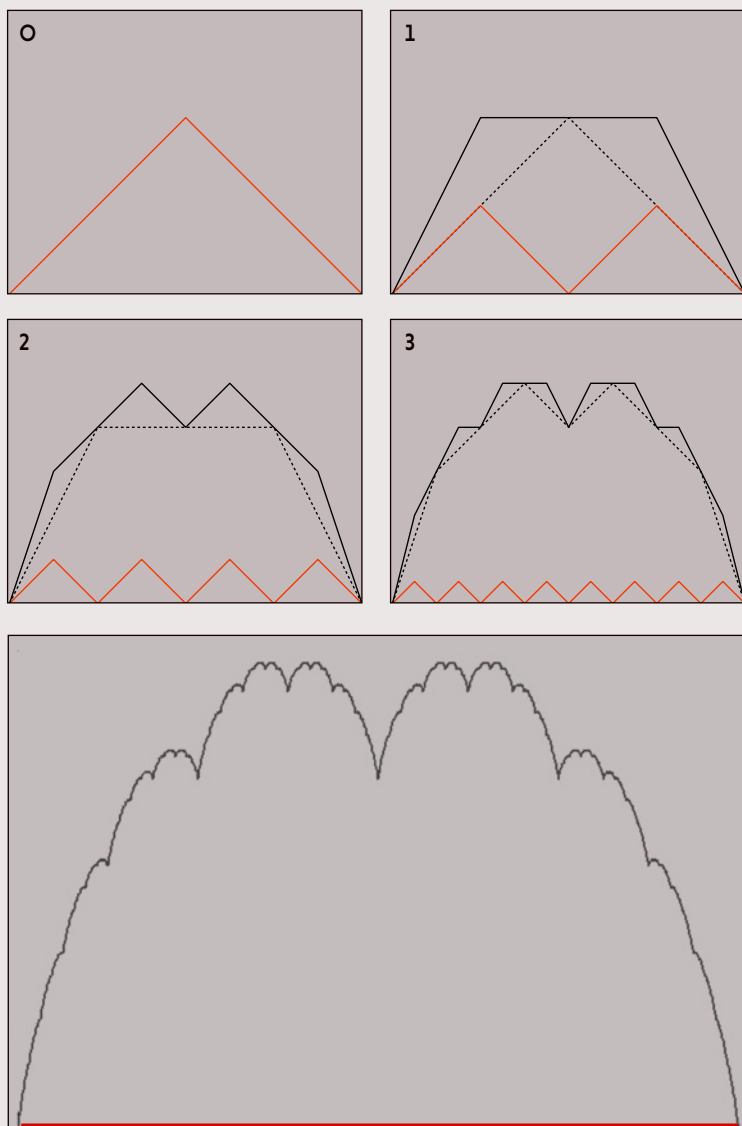
Des exemples de fonctions qui ressemblent à celle de Thomae ont été rencontrés en physique (voir les articles de Sergei Nechaev et Kirill Polovnikov en bibliographie), ce qui prouve encore une fois que les fonctions monstres ne sont pas seulement des lubies de mathématiciens désœuvrés.

La fonction h de Cantor ou « escalier du diable » est définie comme une limite de fonctions continues. Cette limite est elle-même continue en tout point de l'intervalle $[0, 1]$. Son étrange propriété est d'avoir une dérivée nulle sur tout l'intervalle $[0, 1]$ sauf aux points de l'ensemble triadique de Cantor (les six premières itérations de cet ensemble de Cantor sont représentées en a), qui est négligeable, ce qui veut dire qu'il peut être enfermé dans des intervalles dont la longueur cumulée est aussi petite que souhaité. Bien que de dérivée presque partout nulle,

la fonction de Cantor monte sans en avoir l'air de 0 à 1 (b).

Francesco De Comité, du laboratoire Cristal à l'université de Lille, a tiré de l'escalier du diable une belle sculpture. Il a considéré toutes les variantes qu'on obtient pour h en enlevant de manière répétée $x\%$ (au lieu de un tiers) au centre des intervalles utilisés dans la construction de h . Les courbes obtenues ont été mises côte à côte, ce qui donne une surface, et donc la sculpture c. En coupant et en ouvrant la sculpture pour qu'on aperçoive bien la courbe pour un tiers, on a le résultat final d.





LA COURBE DU BLANC-MANGER

4

La fonction du blanc-manger du mathématicien japonais Teiji Takagi est un exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part. Elle est définie comme la limite de fonctions linéaires par morceaux, chacune somme de fonctions très simples (graphes ci-dessus, où la fonction représentée en rouge est additionnée à chaque étape). Le nombre de cassures (le nombre de points où il n'y a pas de tangente) des fonctions de la suite augmente d'une fonction à la suivante.

À la limite, la fonction obtenue est toujours continue, mais n'a de dérivée en aucun point. Il existe d'autres suites de fonctions de ce type, dont celle proposée par Weierstrass, qui sont toutes continues et dérivables en tout point de $\mathbb{R}$, et dont la limite est une fonction continue mais nulle part dérivable. Inversement, on démontre que toute fonction continue dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier peut être définie comme la limite d'une suite de fonctions continues et nulle part dérivables.

> Les fonctions nulle part continues sont utiles, mais les fonctions continues partout le sont plus encore ! On a le sentiment d'en avoir une bonne compréhension. Est-ce certain ?

Avant d'aborder l'exemple de « l'escalier du diable », expliquons ce que signifie l'expression mathématique « presque partout ». L'épaisseur ou la mesure d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est sa longueur, ou la longueur cumulée de ses différentes composantes. Un intervalle a pour mesure sa longueur et une réunion d'intervalles disjoints a pour mesure la somme des longueurs des intervalles constitutifs. Dans les cas compliqués, on procède en enfermant E dans une liste d'intervalles dont on évalue la longueur totale en essayant de la rendre aussi petite que possible. Si l'on arrive à faire que cette longueur totale soit aussi proche de 0 que possible, on dit que E est « négligeable » ou de mesure nulle. Une propriété qui est vraie partout sauf sur un ensemble de mesure nulle est dite « vraie presque partout ».

Un ensemble infini E est dénombrable si l'on sait numérotter ses éléments : $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$. Tout ensemble dénombrable est de mesure nulle car, en enfermant E dans les intervalles $[e_0 - 1/2^n, e_0 + 1/2^n], [e_1 - 1/4^n, e_1 + 1/4^n], \dots, [e_k - 1/2^k n, e_k + 1/2^k n], \dots$, la longueur totale des intervalles utilisés est $(1/n)[1 + 1/2 + 1/4 + \dots] = 2/n$, ce qui peut être rendu aussi petit qu'on le désire. Ce résultat du mathématicien français Émile Borel (1871-1956) montre que les nombres rationnels, bien que denses dans $\mathbb{R}$, forment quand même un ensemble négligeable !

L'ensemble triadique de Cantor, notons-le C , est ce qui reste quand, partant de l'intervalle $[0, 1]$, on en enlève le tiers médian, ce qui donne $[0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, puis qu'on recommence à enlever les tiers médians des deux intervalles obtenus, ce qui donne quatre intervalles de longueur $1/9$ chacun, sur lesquels on recommence l'opération, et ainsi de suite. Cet ensemble C est de mesure nulle car la longueur totale est $2/3$ après une opération, $4/9$ après deux opérations, $\dots, (2/3)^k$ après k opérations : la longueur totale tend vers 0 quand k tend vers l'infini. Cette mesure nulle signifie que le complémentaire de C dans l'intervalle $[0, 1]$ a pour mesure 1. En clair, l'ensemble C est négligeable et son complémentaire est l'intervalle $[0, 1]$ à très peu de choses près.

MONTÉE INSENSIBLE

La « fonction de Cantor » h que l'on va définir, et dont le graphe est surnommé « l'escalier du diable », est continue. Elle passe continûment de 0 à 1 : $h(0) = 0, h(1) = 1$. Elle monte et pourtant elle a une dérivée nulle sur le complémentaire de l'ensemble C de Cantor, donc presque partout. Sur chacun des intervalles que l'on retire en construisant C , la fonction h est constante. Cette fonction a été découverte

en 1885 par Ludwig Scheeffer, qui était un élève de Georg Cantor.

La définition la plus simple de h consiste à la considérer comme une limite de fonctions $h_1, h_2, h_3, \dots$. La fonction continue h_1 vaut 0 en 0, $1/2$ sur le tiers médian de l'intervalle $[0, 1]$, et 1 en 1, et l'on rejoint ces éléments du graphe par des segments de droite (voir l'encadré 3). La fonction h_2 vaut 0, $1/4, 1/2, 3/4, 1$ pour, respectivement, 0, les intervalles $[1/9, 2/9], [1/3, 2/3], [7/9, 8/9]$, et 1. Et ainsi de suite.

La fonction h est étrange. Elle est continue et presque partout constante (de dérivée nulle), c'est-à-dire partout sauf sur un ensemble négligeable. Et pourtant, elle réussit à monter de 0 à 1: elle ne change de valeur «qu'en douce» sur un ensemble de mesure nulle tout en restant continue!

Bien sûr, toutes sortes de variantes existent de cette fonction, qui par exemple sont continues et dérivables, presque partout de dérivée nulle et qui pourtant montent et descendent, voire passent par tous les points qu'on veut s'ils sont en nombre fini.

Notons que notre intuition que «si une fonction a une dérivée nulle presque partout, alors elle est constante» n'est pas entièrement fausse. On démontre en effet que si une fonction a une dérivée nulle sur un intervalle de $\mathbb{R}$, sauf pour les points d'un ensemble dénombrable, alors elle est constante. Dans le cas de la fonction h de Cantor, la dérivée est nulle sauf sur les points de l'ensemble de Cantor, lequel est certes de mesure nulle, mais est infini non dénombrable.

La fonction h permet d'éviter des erreurs, comme celle du Germano-Balte Axel Harnack qui, en 1882, avait cru démontrer que si une fonction a une dérivée nulle sur un intervalle à l'exception des points d'un ensemble de mesure nulle, alors elle est constante.

FONCTIONS CONTINUES PARTOUT MAIS DÉRIVABLES NULLE PART

Venons-en à la catégorie de monstres qui a le plus étonné les mathématiciens, les fonctions continues partout et dérivables nulle part.

Pour une fonction f , être dérivable en un point x signifie que quand y s'approche de x , le rapport $[f(x) - f(y)]/(x - y)$ tend vers une limite finie, la «dérivée en x ». Le concept est naturel: la dérivée (par rapport au temps) de la distance parcourue par un véhicule à l'instant t est sa vitesse à cet instant. Géométriquement, l'existence d'une dérivée en x de la fonction f signifie que le graphe de f a une tangente en x . S'il y a une cassure du graphe, comme c'est le cas en 0 pour la fonction valeur absolue $|x|$, alors la fonction n'est pas dérivable en ce point. L'idée que la continuité d'une fonction sur un intervalle oblige à être assez régulière est naturelle, et l'on pouvait donc croire que si une fonction est continue sur un intervalle, à l'exception de quelques points

(comme pour la fonction $|x|$), la fonction devrait y être dérivable.

Le 18 juillet 1872, le mathématicien allemand Karl Weierstrass présenta à l'Académie des sciences de Berlin un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier et qui n'est pourtant dérivable en aucun point. La fonction proposée résultait de manipulations habituelles sur les fonctions continues dérivables partout: il s'agit d'une somme infinie de telles fonctions. La formule de Weierstrass est:

$$f_{a,b}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

Si l'on prend pour coefficients un nombre réel a tel que $0 < a < 1$ et un entier b tel que $ab > 1 + 3\pi/2$, on montre que $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est dérivable nulle part. Si l'on ne fait la somme que jusqu'à un entier k , on obtient une fonction continue et dérivable qui oscille de plus en plus vite quand k augmente; cette oscillation, qui correspond à une vibration accélérée de la tangente au graphe, rend impossible l'existence de la tangente quand k tend vers l'infini.

Weierstrass ne fut pas le premier à trouver une telle fonction. Au moins deux mathématiciens l'avaient précédé. Le premier est le mathématicien tchèque Bernard Bolzano, qui trouva une telle fonction vers 1830 mais dont les textes sur le sujet ne furent redécouverts que bien plus tard et publiés en 1922. Indépendamment, vers 1860, le mathématicien suisse Charles Cellérier trouva lui aussi une telle fonction, publiée après sa mort en 1890 (pour des détails, voir la belle et très complète thèse de Johan Thim, disponible sur internet).

L'encadré 4 donne le dessin et l'idée d'une autre fonction ayant les propriétés voulues, mais plus facile à visualiser. Son graphe est nommé «courbe du blanc-manger» (car elle ressemble au dessert de même nom) ou «courbe de Takagi», d'après le mathématicien japonais Teiji Takagi qui l'a décrite en 1901.

La courbe de Weierstrass a été l'une des toutes premières courbes fractales étudiées. Pourtant, le calcul de la dimension de Hausdorff du graphe de la fonction de Weierstrass (qui mesure en quelque sorte son agitation) est resté très longtemps un problème ouvert. Conjecturé depuis plus de trente ans par Benoît Mandelbrot, le théorème qui indique que cette dimension est égale à $2 + \ln(a)/\ln(b)$ n'a été prouvé qu'en 2017 par le mathématicien allemand Gerhard Keller, et indépendamment par le mathématicien chinois Weixiao Shen.

Insistons sur le fait que ces courbes étranges font aujourd'hui encore l'objet de nombreuses recherches. On en découvre de nouvelles de la même catégorie et on les rencontre en physique, ce qui prouve que ces «monstres mathématiques» sont à la fois d'une grande banalité et très utiles... ■

BIBLIOGRAPHIE

R. Ferreol, **L'escalier du diable**, <https://bit.ly/2QJLCNg>, consulté en juin 2020.

W. Shen, **Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions**, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 289, pp. 223-266, 2018.

S. Nechaev et K. Polovnikov, **Rare-event statistics and modular invariance**, *Physics-Uspekhi*, vol. 61(1), pp. 99-104, 2018.

S. Nechaev, **Non euclidean geometry in nature**, dans *Order, Disorder and Criticality, Advanced Problems of Phase Transition Theory*, vol. 5 (ed. Yuri Holovatch), 2018 (<https://arxiv.org/pdf/1705.08013.pdf>).

K. Beanland et al., **Modifications of Thomae's function and differentiability**, *The American Mathematical Monthly*, vol. 116(6), pp. 531-535, 2009.

J. Thim, **Continuous, Nowhere Differentiable Functions**, Master Thesis, Lulea University, 2003 (<https://bit.ly/2YWLYEW>).

L'AUTEUR



LOÏC MANGIN
rédacteur en chef adjoint
à *Pour la Science*

VOIR LA CONFIANCE EN PEINTURE

L'analyse informatique de milliers de portraits peints en Europe montre que la confiance sociale ne cesse d'augmenter depuis le ^{xv}e siècle.

Il a l'air un peu tendu, voire méfiant, et à tout le moins préoccupé. C'est que Thomas Cranmer (1489-1556), représenté par Gerlach Flicke en 1545 (voir le tableau ci-contre), avait fort à faire. Archevêque de Canterbury, il eut à poser avec Thomas Cromwell les fondations de l'Église d'Angleterre sous le règne du tyrannique Henri VIII, désireux de voir annuler son mariage avec Catherine d'Aragon. Le monarque est célèbre notamment pour avoir fait exécuter deux de ses six épouses. Ses successeurs n'étaient pas en reste : Cranmer sera brûlé sur ordre de la catholique Marie I^{re}, dite Marie la sanglante (*Bloody Mary*).

Près de trois siècles plus tard, sir Matthew Wood (1768-1843) sur le tableau d'Arthur William Devis peint vers 1815 (voir le tableau page ci-contre) semble plus assuré, plus affirmé, plus confiant envers

son entourage, et il a de quoi afficher cette expression. Ce fils de tisserand fut tour à tour lord-maire de Londres, élu au parlement et enfin anobli.

Ces portraits qui prenaient des mois à être réalisés portent un message et relèvent d'une stratégie de communication du commanditaire. En un mot, ils sont le reflet d'une époque. Mais ces deux exemples sont-ils représentatifs d'une évolution à plus grande échelle d'un gain de confiance traversant l'histoire ? C'est ce que semblent prouver les résultats de Nicolas Baumard, de l'institut Jean-Nicod (ENS, EHESS, PSL) et de ses collègues de l'Inserm, de Sciences Po et du Cevipof. À travers l'étude d'environ 2 000 portraits d'Européens datés de 1505 à 2016 et conservés à la National Portrait Gallery, à Londres, ils ont montré qu'au fil des siècles, les expressions de confiance et de sympathie se faisaient plus nombreuses sur les visages représentés, alors que les



Les visages de Thomas Cranmer (ci-dessus) et de sir Matthew Wood (à droite) montrent, lorsqu'ils sont analysés par un algorithme (dans les cartouches, les points colorés indiquent ceux pris en compte par le programme) aux côtés de près de 2 000 autres portraits, que la confiance sociale n'a cessé d'augmenter depuis la fin du Moyen Âge.

signes d'une certaine méfiance disparaissaient. La transition de Thomas Cranmer vers Sir Matthew Wood serait bien une tendance générale.

Comment s'y sont pris les scientifiques ? Ils ont conçu un algorithme d'analyses d'images qui a appris à lire l'expression de visages selon par exemple le sourire ou la forme des sourcils. Ce programme d'apprentissage automatique a été « formé » à partir de quatre corpus d'images, des photographies, pour lesquelles le sentiment de confiance exprimé avait déjà été estimé par d'autres techniques. Lors de cette phase d'apprentissage, les biais relatifs à l'âge, au sexe, à