

L'ESSENTIEL

● La musique, de la composition dodécaphonique et sérielle jusqu'aux morceaux pop, obéit à des règles mathématiques dont la connaissance facilite notablement l'analyse des compositions.

● Au cœur de ces règles mathématiques, on trouve le concept de groupes et diverses transformations, notamment des symétries.

● Selon certains, cette structure mathématique serait naturelle et préexisterait dans notre cerveau, ce qui ouvrirait de nouvelles perspectives pour étudier la perception musicale.

LES AUTEURS



MORENO ANDREATTA est directeur de recherche CNRS en musicologie computationnelle à l'Ircam et à l'Institut de recherche mathématique avancée de Strasbourg.



CARLOS AGON est professeur en informatique à Sorbonne Université et chercheur dans l'équipe Représentations musicales de l'Ircam.

Algèbre et géométrie : sont-elles inscrites dans le cerveau ?

La musique contemporaine se comprend mieux avec les mathématiques et notamment avec la théorie des groupes. Ce sont des concepts abstraits, pourtant, ces structures seraient inhérentes à notre cerveau.

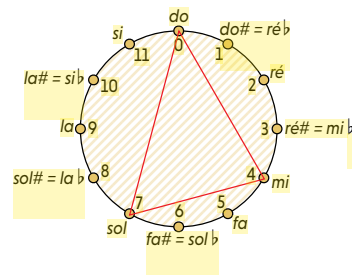
A

u début du ^{xvii}e siècle, le mathématicien suisse Leonhard Euler se penche sur une question cruciale : pourquoi la musique apporte-t-elle du plaisir ? Dans son *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principijs dilucide expositae* (« Essai d'une nouvelle théorie de la musique, exposée en toute clarté selon les principes de l'harmonie les mieux fondés »), en 1739, il répond. Selon lui, l'élément clé est la perfection, qu'il recherche dans les rapports de nombres représentant les accords.

Euler est l'un des nombreux mathématiciens, depuis Pythagore, qui se sont intéressés à la musique. Depuis une vingtaine d'années, grâce à l'informatique, l'étude des relations entre mathématiques et musique a connu de nombreux développements. La musicologie est devenue une discipline systématique, jusqu'à donner naissance à un nouveau champ d'études, la « musicologie computationnelle ». Il s'agit d'analyser les œuvres musicales de façon à mettre en évidence les structures mathématiques sous-jacentes.

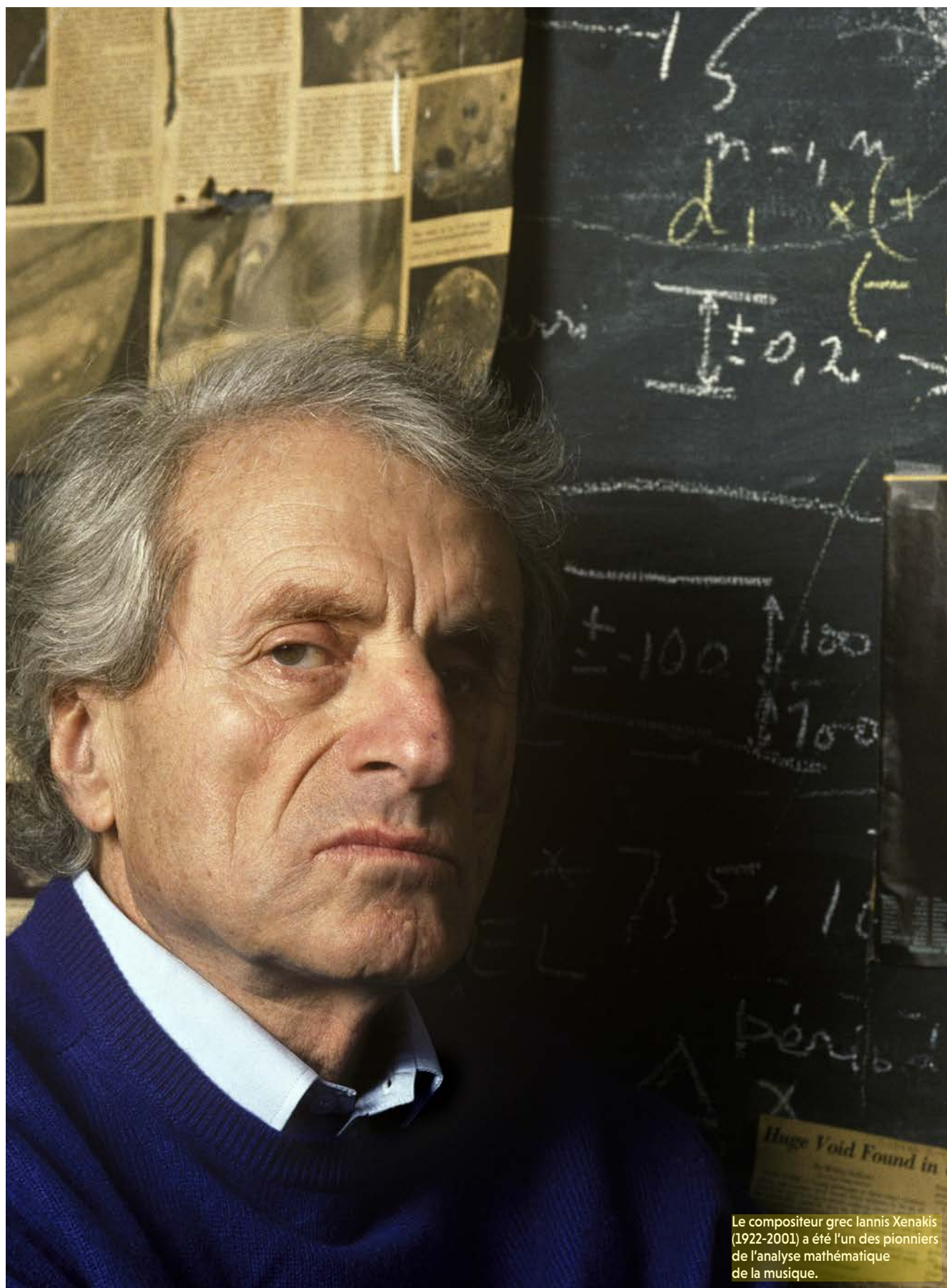
Cependant, à mesure qu'elle prenait son essor, la musicologie computationnelle s'est éloignée d'autres démarches systématiques, en particulier celles orientées vers la cognition et la perception musicales. Les deux visions sont-elles compatibles ? Oui et, plus encore, nous verrons qu'elles s'enrichissent mutuellement dans un dialogue entre mathématiques et cognition.

L'utilisation des méthodes algébriques pour étudier la musique, notamment contemporaine, met en œuvre trois aspects souvent liés, à savoir les aspects théoriques et analytiques, qui nous intéresseront ici, ainsi que ceux d'aide à la composition. Trois compositeurs et théoriciens sont emblématiques de cette réflexion théorique sur



LA GAMME TEMPÉRÉE

La gamme tempérée, c'est-à-dire celle où toutes les notes sont séparées par un demi-ton, correspond à l'octave d'un piano. Elle est représentée par un cercle où chaque note est numérotée, les dièses (#) et les bémols (b) étant considérés comme équivalents selon le principe de l'identification enharmonique (par exemple le *do#* est égal au *réb*). Dans cette représentation, un ensemble de *n* notes, par exemple un accord ou une série dodécaphonique, correspond à un polygone à *n* côtés (en rouge).



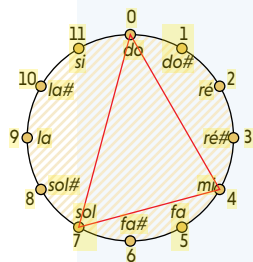
Le compositeur grec Iannis Xenakis (1922-2001) a été l'un des pionniers de l'analyse mathématique de la musique.

UNE BOÎTE À OUTILS MUSICALE

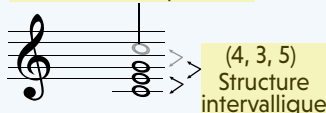
La structure intervallique

La structure intervallique est constituée de la suite d'intervalles (en demi-tons) séparant les notes consécutives d'un ensemble. Dans la représentation circulaire, elle correspond aux intervalles entre les sommets du polygone à m côtés correspondant à l'ensemble de notes. Par exemple, la structure intervallique

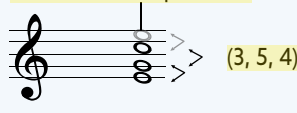
de l'accord majeur (voir les Repères, page 6), tel *do*, *mi* et *sol*, est égale à (4, 3, 5). Les permutations circulaires de cette structure intervallique – (3, 5, 4) et (5, 4, 3) – correspondent aux renversements de l'accord. La représentation circulaire est identique dans les trois cas.



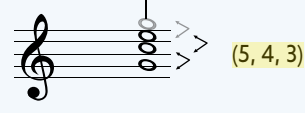
Do à l'octave supérieure



Mi à l'octave supérieure

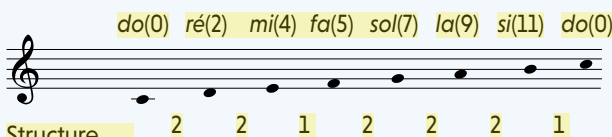
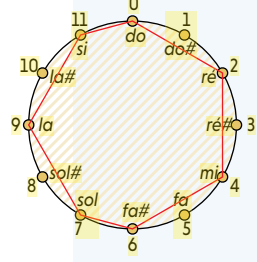
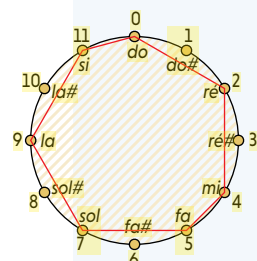


Sol à l'octave supérieure

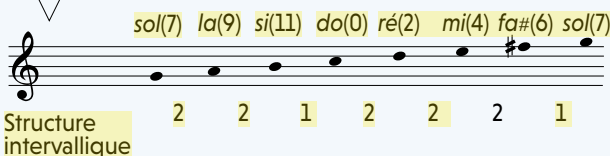
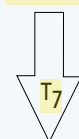


La transposition

La transposition est une addition modulo 12. Elle laisse inchangée la structure intervallique d'une gamme ou d'un accord. Imaginons une transposition de sept demi-tons (à chaque note, on ajoute 7 modulo 12) de la gamme diatonique : ainsi, de *do* (0) on passe à *sol* (7) et de *la* (9) on passe à *mi* (4), car $(9+7)_{12}=4$. Dans la représentation circulaire, cette transposition correspond à une rotation du polygone correspondant. En d'autres termes, la structure intervallique est un invariant qui permet d'identifier de façon unique un accord et ses transpositions d'un nombre donné de demi-tons, celles-ci étant des rotations du polygone inscrit dans le cercle : la structure intervallique est préservée.

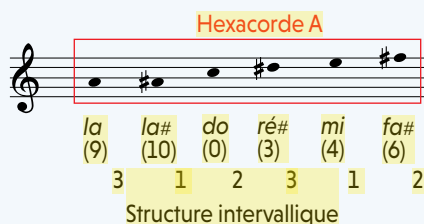
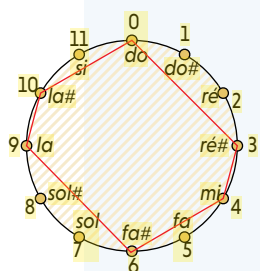


Structure intervallique

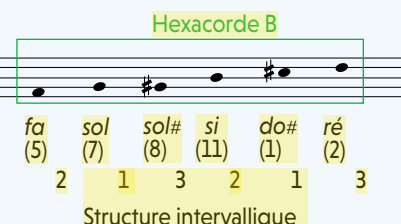


Structure intervallique

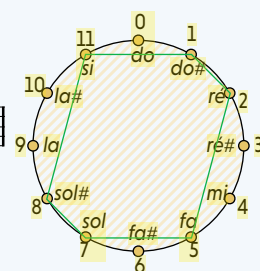
L'invariance transpositionnelle



Structure intervallique



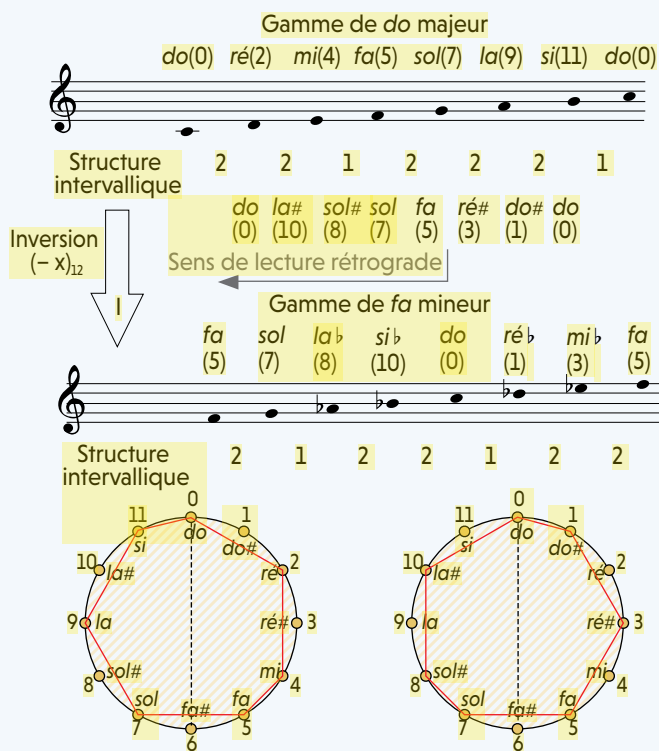
Structure intervallique



La structure intervallique met en évidence la symétrie interne de certaines séries de notes, tel un accord ou une gamme. Par exemple, des accords coïncident avec une, voire plusieurs de leurs transpositions. Une telle structure se nomme, d'après le compositeur français Olivier Messiaen (1908-1992), un mode à transpositions limitées. Tout mode de ce type est donné par une structure intervallique ayant des périodicités internes, c'est-à-dire des sous-structures intervalliques qui se répètent. On trouve de telles structures par exemple lorsqu'on partage une série dodécaphonique de Schoenberg dans le cinquième

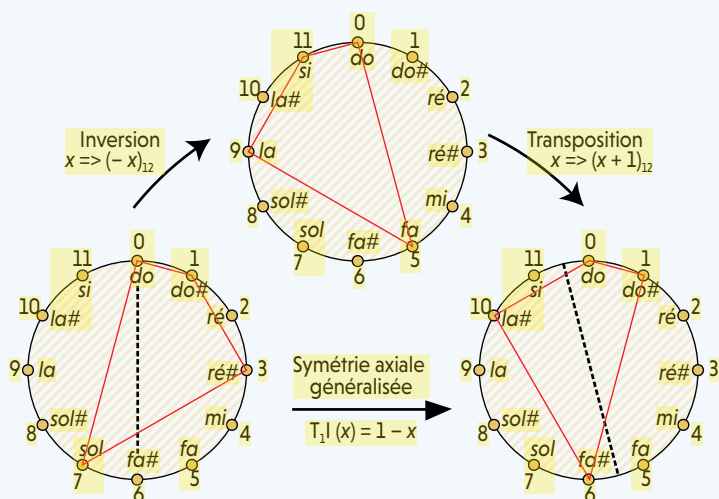
mouvement de la *Serenade* op. 24 en deux hexacordes (A et B). Chacun des deux hexacordes est doté d'une propriété d'invariance transpositionnelle : dans les deux cas, la structure intervallique est « redondante », c'est-à-dire qu'elle se décompose en deux structures intervalliques plus petites identiques, respectivement (3, 1, 2) et (2, 1, 3). Les deux hexacordes ne sont pas équivalents à une transposition près, car les structures intervalliques correspondantes ne sont pas les rotations circulaires l'une de l'autre : elles sont chacune la lecture rétrograde de l'autre.

L'inversion



L'inversion est une opération sur une gamme (ou un accord ou une série dodécaphonique) qui associe à chaque nombre x l'opposé $(-x)$ modulo 12. Géométriquement, cela se traduit par une symétrie de la structure intervallique associée par rapport à un axe. L'exemple le plus simple d'inversion est celui d'une symétrie par rapport au diamètre principal (l'axe qui passe par les points $do = 0$ et $fa\# = 6$). Ainsi, la gamme de fa mineur mélodique est une inversion de la gamme de do majeur.

La symétrie axiale généralisée



La symétrie axiale généralisée est la combinaison d'une transposition et d'une inversion, c'est-à-dire d'une transposition et d'une symétrie autour du diamètre principal ($do-fa$). On obtient alors des symétries génériques qui correspondent à des réflexions par rapport à des axes qui ne passent par aucun point du cercle de la gamme tempérée.

la musique: l'Américain Milton Babbitt (1916-2011), le Grec Iannis Xenakis (1922-2001) et le Roumain Anatol Vieru (1926-1998). Tous les trois sont arrivés, presque au même moment et d'une façon indépendante, à la découverte du caractère algébrique du tempérament égal, c'est-à-dire que dans une gamme dite tempérée, chaque note est séparée de sa voisine par un demi-ton ($do, do\#, ré, ré\#, mi, fa, \dots$, soit une gamme à 12 demi-tons, ce qui diffère notablement de la gamme dite diatonique à 7 tons $do, ré, mi, fa, \dots$, ce qui correspond aux touches blanches du clavier). Plus précisément, ils ont mis en évidence la notion mathématique de *groupe* en tant que concept unificateur. Grâce à quelques exemples, nous verrons comment cette notion aide à analyser la musique.

DE GROUPE EN GROUPE

La notion de groupe est née au début du XIX^e siècle des travaux sur les racines de polynômes, notamment ceux d'Évariste Galois et de Joseph-Louis Lagrange. Cependant, cette structure ne fut utilisée en musique qu'à partir de la seconde moitié du XX^e siècle grâce à Milton Babbitt. On lui doit l'observation fondamentale selon laquelle le système dodécaphonique est « un groupe de permutations qui est façonné par la structure de ce modèle mathématique ». En quoi consiste la musique dodécaphonique ?

Elle se distingue de la musique tonale où une des sept notes de la gamme diatonique prédomine sur les autres et leur impose une hiérarchie. En 1923, Arnold Schoenberg (1874-1951) veut échapper à ce diktat et établit la méthode de composition avec 12 sons (d'où le nom dodécaphonique), qui donne le même mérite à chaque note de la gamme tempérée ou à tempérament égal.

Une composition dodécaphonique est fondée sur une séquence de ces 12 sons musicaux distincts, sans répétition, nommée série élémentaire. L'œuvre est une combinaison de cette série et d'autres séries dérivées par des symétries.

Notons d'abord que chaque nombre, représentant une note, est une classe d'équivalence modulo 12, c'est-à-dire que chaque nombre représente, d'une part, ce nombre, mais aussi ce nombre additionné d'un multiple de 12. Par exemple, 1 est équivalent à 49 ou à -11. L'addition de deux nombres devient une addition modulo 12: par exemple, $(3+8)_{12}=11$, $(5+9)_{12}=2$.

Examinons maintenant les symétries, à partir d'une série élémentaire P . La série rétrograde R est P jouée à l'envers. Dans la série renversée I , les nombres de la série élémentaire P sont remplacés par leurs nombres opposés modulo 12. La série renversée rétrograde RI est obtenue de P en appliquant les deux opérations précédentes. Enfin, la série transposée de P par k demi-tons est obtenue par l'addition modulo 12 de k à tous les nombres de la série P . De même, nous obtenons les