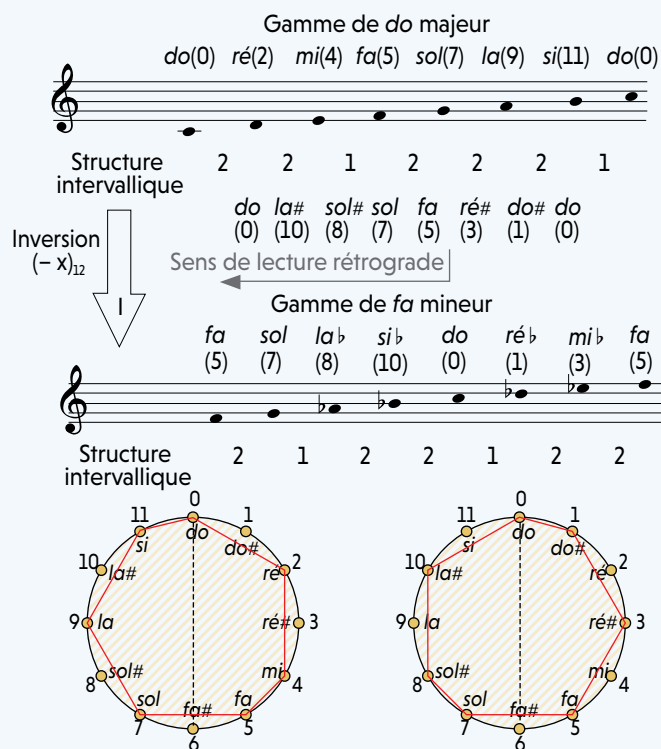
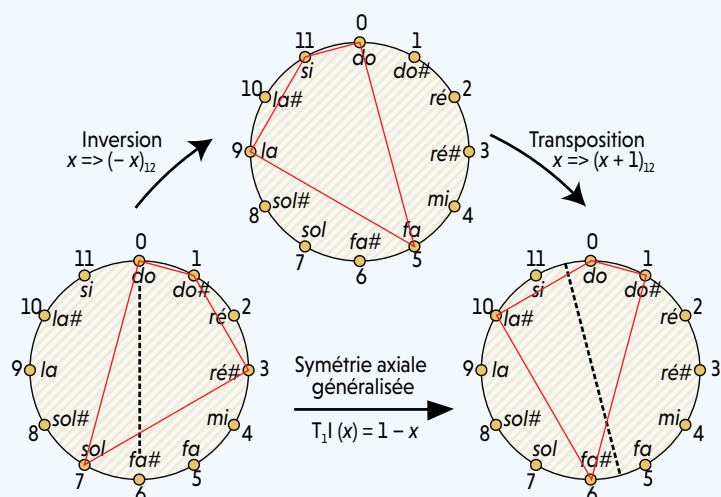


## L'inversion



L'inversion est une opération sur une gamme (ou un accord ou une série dodécaphonique) qui associe à chaque nombre  $x$  l'opposé  $(-x)$  modulo 12. Géométriquement, cela se traduit par une symétrie de la structure intervallique associée par rapport à un axe. L'exemple le plus simple d'inversion est celui d'une symétrie par rapport au diamètre principal (l'axe qui passe par les points  $do = 0$  et  $fa = 6$ ). Ainsi, la gamme de *fa* mineur mélodique est une inversion de la gamme de *do* majeur.

## La symétrie axiale généralisée



La symétrie axiale généralisée est la combinaison d'une transposition et d'une inversion, c'est-à-dire d'une transposition et d'une symétrie autour du diamètre principal (*do-fa*). On obtient alors des symétries génériques qui correspondent à des réflexions par rapport à des axes qui ne passent par aucun point du cercle de la gamme tempérée.

➤ la musique: l'Américain Milton Babbitt (1916-2011), le Grec Iannis Xenakis (1922-2001) et le Roumain Anatol Vieru (1926-1998). Tous les trois sont arrivés, presque au même moment et d'une façon indépendante, à la découverte du caractère algébrique du tempérament égal, c'est-à-dire que dans une gamme dite tempérée, chaque note est séparée de sa voisine par un demi-ton (*do, do#, ré, ré#, mi, fa...*, soit une gamme à 12 demi-tons, ce qui diffère notablement de la gamme dite diatonique à 7 tons *do, ré, mi, fa...*, ce qui correspond aux touches blanches du clavier). Plus précisément, ils ont mis en évidence la notion mathématique de *groupe* en tant que concept unificateur. Grâce à quelques exemples, nous verrons comment cette notion aide à analyser la musique.

## DE GROUPE EN GROUPE

La notion de groupe est née au début du XIX<sup>e</sup> siècle des travaux sur les racines de polynômes, notamment ceux d'Évariste Galois et de Joseph-Louis Lagrange. Cependant, cette structure ne fut utilisée en musique qu'à partir de la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle grâce à Milton Babbitt. On lui doit l'observation fondamentale selon laquelle le système dodécaphonique est « un groupe de permutations qui est façonné par la structure de ce modèle mathématique ». En quoi consiste la musique dodécaphonique ?

Elle se distingue de la musique tonale où une des sept notes de la gamme diatonique prédomine sur les autres et leur impose une hiérarchie. En 1923, Arnold Schoenberg (1874-1951) veut échapper à ce diktat et établit la méthode de composition avec 12 sons (d'où le nom dodécaphonique), qui donne le même mérite à chaque note de la gamme tempérée ou à tempérament égal.

Une composition dodécaphonique est fondée sur une séquence de ces 12 sons musicaux distincts, sans répétition, nommée série élémentaire. L'œuvre est une combinaison de cette série et d'autres séries dérivées par des symétries.

Notons d'abord que chaque nombre, représentant une note, est une classe d'équivalence modulo 12, c'est-à-dire que chaque nombre représente, d'une part, ce nombre, mais aussi ce nombre additionné d'un multiple de 12. Par exemple, 1 est équivalent à 49 ou à -11. L'addition de deux nombres devient une addition modulo 12: par exemple,  $(3+8)_{12}=11$ ,  $(5+9)_{12}=2$ .

Examinons maintenant les symétries, à partir d'une série élémentaire *P*. La série rétrograde *R* est *P* jouée à l'envers. Dans la série renversée *I*, les nombres de la série élémentaire *P* sont remplacés par leurs nombres opposés modulo 12. La série renversée rétrograde *RI* est obtenue de *P* en appliquant les deux opérations précédentes. Enfin, la série transposée de *P* par *k* demi-tons est obtenue par l'addition modulo 12 de *k* à tous les nombres de la série *P*. De même, nous obtenons les

transposées par  $k$  demi-tons d'une série rétrograde  $T_k R$ , d'une série renversée  $T_k I$  et d'une série renversée rétrograde  $T_k R I$ .

La musique sérielle est une extension du dodécaphonisme où l'idée de série est appliquée aux notes, mais aussi aux rythmes, aux intensités et à tous les paramètres du son.

L'ensemble des entiers modulo 12 offre un premier exemple musical de structure de groupe, celui noté  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . Il peut être interprété musicalement de plusieurs façons : soit comme le groupe des intervalles musicaux (avec l'addition modulo 12), soit comme un groupe de transformations, celui engendré par les transpositions, l'un des types des transformations utilisées dans la technique dodécaphonique. On peut représenter ce groupe par un cercle, celui-ci correspondant à une octave, divisé en 12 parties.

L'hypothèse sous-jacente de cette représentation circulaire est qu'elle permet de formaliser tout accord musical : tout accord de  $m$  notes distinctes correspond, d'un point de vue géométrique, à un polygone à  $m$  côtés inscrit dans le cercle (voir la figure page 24).

Dans la tradition américaine, la note *do* est notée 0, tandis que les compositeurs sériels européens de la seconde moitié du  $xx^e$  siècle, tels le Français Pierre Boulez (1925-2016) et l'Allemand Karlheinz Stockhausen (1928-2007), ont privilégié une autre représentation faisant correspondre au *do* l'entier 1. La différence entre les écoles américaine et européenne est moins une différence de notation qu'une distance conceptuelle qui sépare les deux traditions théoriques. Dans cet article, nous adopterons la notation américaine.

Milton Babbitt propose au début des années 1950 d'exprimer les opérations sérielles comme des transformations de la structure du groupe cyclique  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . En effet, il remarque que l'on peut interpréter les quatre formes d'une série dodécaphonique (P, R, I et RI) comme les quatre transformations suivantes :

$$P: (a, b) \Rightarrow (a, b)$$

$$I: (a, b) \Rightarrow (a, (12-b)_{12})$$

$$R: (a, b) \Rightarrow (11-a, b)$$

$$IR: (a, b) \Rightarrow (11-a, (12-b)_{12})$$

Ici, la série dodécaphonique P est représentée par une suite de couples  $(a, b)$ ,  $a$  indiquant la position de la note dans la série et  $b$ , la note (relative

à une origine 0). Ces quatre transformations d'une série dodécaphonique et, plus généralement, d'un profil mélodique constituent les éléments d'une structure algébrique nommée groupe de Klein de quatre éléments. Il tient compte de toutes les transformations de la musique dodécaphonique, alors que le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  ne rend compte que des transpositions.

Le groupe cyclique  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  et le groupe de Klein ne sont pas les seules structures algébriques intéressantes en musique. Deux autres groupes sont importants, mais avant de les décrire, nous devons définir deux concepts importants, celui de la structure intervallique – l'énumération des intervalles, en demi-tons, qui séparent les notes successives d'un accord – et de la symétrie axiale généralisée, soit la composition d'une transposition et d'une inversion (voir l'encadré page 26). La représentation circulaire de ces deux idées, ajoutées à celles de la transposition et de l'inversion, nous fournira un ensemble d'outils d'analyse qui nous aideront à comprendre la structure de diverses œuvres.

## UNE BOÎTE À OUTILS

Ainsi, la notion de symétrie axiale généralisée nous éclaire sur la composition d'une polyphonie sérielle constituée de deux hexacordes (séries de six notes) liés par une telle symétrie (voir la figure ci-dessous). Le recours à une symétrie axiale généralisée dans le sérialisme n'est pas étonnant, car cette technique de composition est fondée sur une structure mathématique de groupe. En revanche, et cela soulève des questions quant au caractère universel de certaines constructions algébriques, on trouve de telles symétries chez des compositeurs utilisant d'autres techniques que le sérialisme, par exemple dans la musique modale d'Olivier Messiaen ou dans des chansons de musique pop (voir l'encadré page 31).

En musique, le mode d'une gamme est constitué des mêmes notes que la gamme dont il est issu, mais a une sonorité qui lui est propre, caractérisée par une tonique et par les intervalles entre cette tonique et les autres notes. Par exemple, à partir de la gamme de *do* majeur, dont la tonique est la note *do* (*do, ré, mi, fa, sol, la* et *si*), avec pour structure intervallique (en demi-tons : 2, 2, 1, 2, 2, 1), on peut déplacer l'axe tonal sur la deuxième note afin d'obtenir un

**LA SYMÉTRIE AXIALE GÉNÉRALISÉE** permet d'analyser cet extrait d'une polyphonie sérielle (à gauche) à deux voix. Ces deux voix correspondent à deux hexacordes (l'un en bleu, l'autre en rouge) liés par une symétrie axiale généralisée, comme le montre la représentation circulaire (à droite). On peut aussi vérifier que si on segmente l'extrait en deux parties correspondant aux barres de mesure, on obtient également deux hexacordes en rapport de symétrie axiale généralisée.

