



nous assure qu'il est possible de reconstruire le champ vibratoire avec une précision comparable à celle de la vibrométrie laser et de l'holographie acoustique classique. Cela est faisable grâce au caractère parcimonieux en ondes planes des modes propres de vibration.

Si les ondes planes pertinentes avaient été nombreuses, 120 mesures auraient été insuffisantes pour contraindre correctement les combinaisons possibles. Ainsi, la combinaison la plus parcimonieuse d'ondes planes nous donne accès au champ vibratoire de la table d'harmonie, et par suite aux modes propres. Cette approche est nommée holographie acoustique compressée, en référence à une technique mathématique récente également appliquée en imagerie médicale ou en radioastronomie : l'échantillonnage compressé (*voir l'encadré page suivante*).

Le calcul de la combinaison optimale (la plus parcimonieuse) d'ondes planes repose sur des algorithmes d'optimisation numérique qui, bien que complexes, sont à la portée des ordinateurs de bureau actuels.

Comment détermine-t-on les ondes planes qui composent la vibration de l'instrument de musique? En théorie, le nombre d'ondes planes possibles est infini, la direction et la longueur d'onde pouvant prendre n'importe quelles valeurs. Comme cela n'est pas gérable dans un programme numérique, nous utilisons un catalogue fini d'ondes planes, avec des valeurs discrètes de direction et de longueur d'onde (de l'ordre d'une centaine d'ondes planes). L'échantillonnage compressé permet de sélectionner rapidement un certain nombre d'ondes planes dont la combinaison reproduit correctement les 120 mesures.

Le principe de parcimonie est crucial dans l'algorithme utilisé. Le programme cherche à minimiser le nombre d'ondes nécessaires pour reproduire le signal enregistré. La combinaison la plus parcimonieuse d'ondes planes nous donne accès au champ vibratoire de la table d'harmonie. À partir de là, nous pouvons calculer les modes propres.

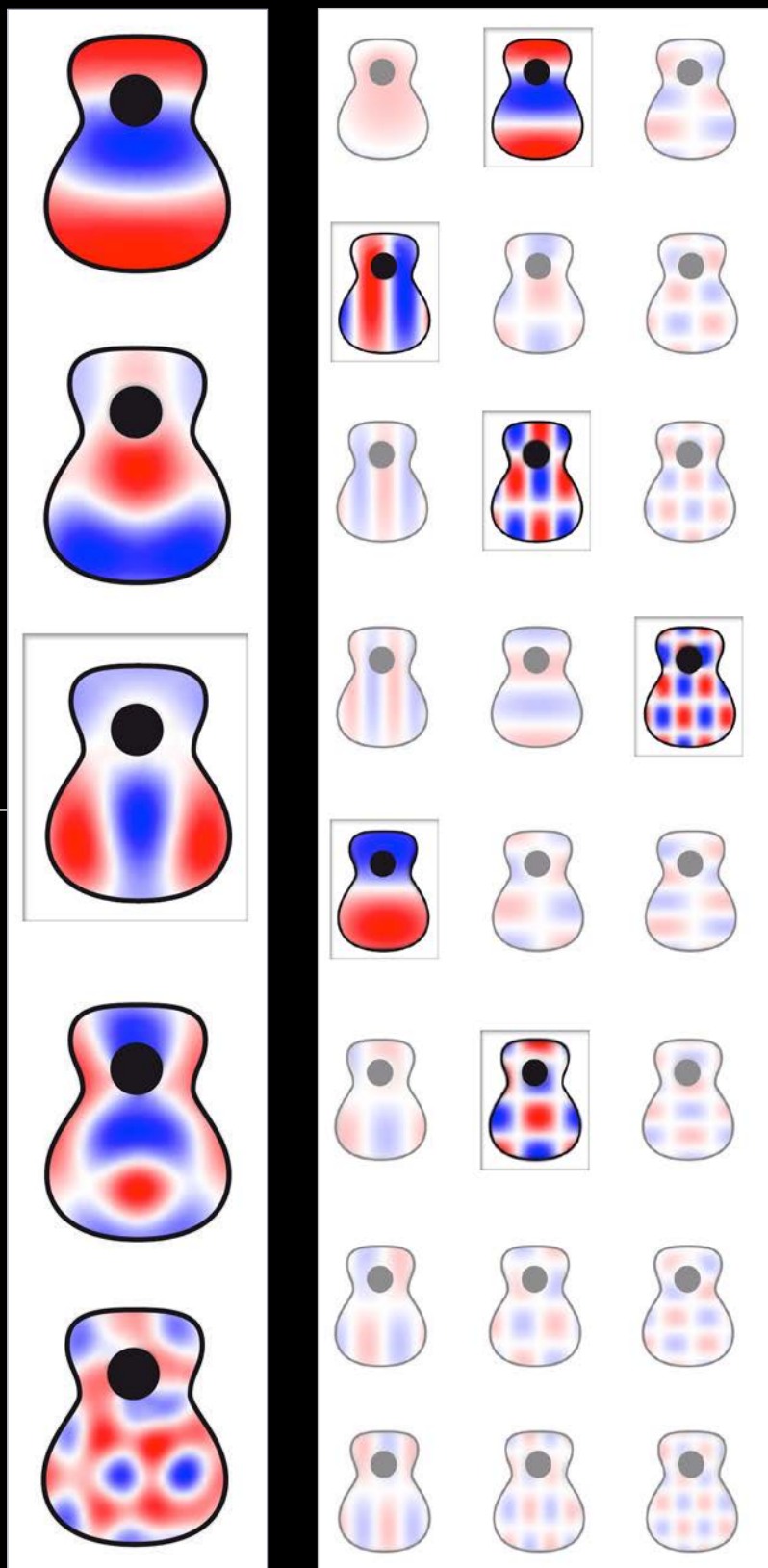
DES MICROS DANS LE DÉSORDRE

Reste une question : comment disposer les 120 microphones de l'antenne? De façon un peu contre-intuitive, les algorithmes compressés fonctionnent mieux lorsque la répartition des microphones de l'antenne est irrégulière, ou bien lorsque la forme de la structure vibrante est elle-même complexe, comme c'est le cas de la table d'harmonie d'une guitare (*voir la photo page 50*). Pour quelle raison?

Les ondes ont une structure périodique. Ainsi, si nous répartissons les microphones de façon régulière, nous risquons d'avoir une redondance dans l'information et ne pas en avoir assez pour reconstruire correctement

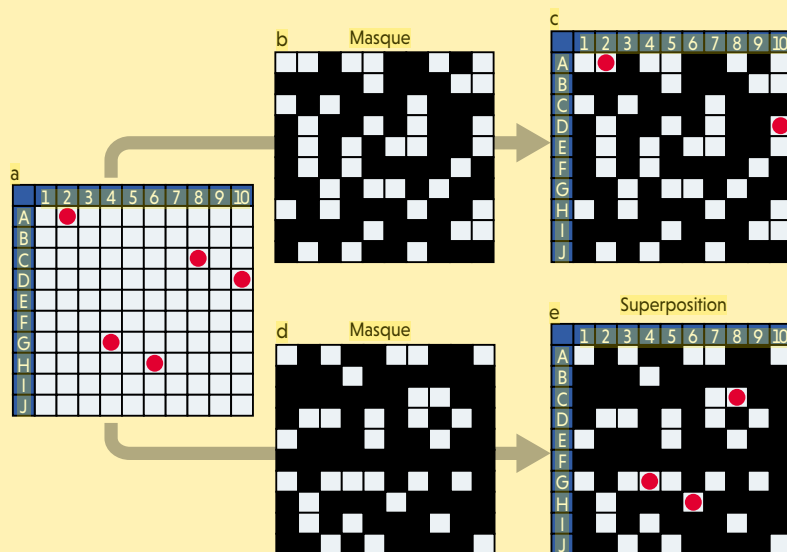
MODES PROPRES

CATALOGUE D'ONDES PLANES



BATAILLE NAVALE ET ÉCHANTILLONNAGE

Pour comprendre le principe de l'échantillonnage compressé, prenons une analogie simple: le jeu de la Bataille navale, que nous allons encore simplifier en considérant que les cinq bateaux n'occupent qu'une seule case chacun, dans une grille de 10 x 10. Le but du jeu est de retrouver la position de tous les bateaux ennemis en posant le minimum de questions, chacune testant une case à la fois: A7? F4? On s'aperçoit vite que cette façon de sonder l'ensemble de la grille n'est pas très efficace: presque tous les coups « tombent à l'eau » et, en fin de compte, il ne faudra pas beaucoup moins de 100 questions pour finir la partie (il faut en moyenne 84 questions). Pour être plus efficace – en faisant abstraction des règles du jeu! –, il faut que chaque question nous renseigne simultanément sur plusieurs positions spatiales: par exemple, « y a-t-il au moins un bateau sur la colonne D? Sur la ligne 7? » C'est mieux, car on a ainsi des chances d'éliminer toute une série de cases en une seule question. L'étape suivante est de poser une question qui nous renseigne, certes de façon imparfaite, sur l'ensemble de la grille. Nous utilisons alors des méthodes liées aux nombres aléatoires. Par exemple, construisons un « masque binaire », de même taille 10 x 10 que la grille, avec autant de cases opaques que de cases transparentes, réparties aléatoirement. Les nouvelles questions seraient: « À travers ce masque, combien peut-on voir de bateaux? Et à travers cet autre masque? » Avec une vingtaine de ces masques et les réponses correspondantes, un petit programme numérique ne met que quelques



Dans une bataille navale simplifiée avec cinq bateaux rouges sur une grille (a), tester chaque case l'une après l'autre n'est pas la meilleure stratégie pour trouver tous les bateaux. On gagne en efficacité en utilisant des masques non réguliers (b et d). Chacun fournit un certain nombre d'informations (c et e). On retrouve la position de tous les navires avec quelques masques et en superposant les informations recueillies avec chacun.

secondes pour retrouver entièrement la grille de l'adversaire. Le nombre de « questions » a été divisé par quatre! La performance n'est cependant pas toujours au rendez-vous. Cela ne fonctionne ici que parce que le nombre de bateaux est faible par rapport à la taille de la grille: seules 5% des cases sont occupées. En mathématiques, cette propriété est nommée parcimonie: un objet complexe (telle une grille de Bataille navale) peut être décrit comme la somme d'un très petit nombre d'objets élémentaires. D'une façon générale, la théorie de l'échantillonnage compressé, développée il y a une dizaine d'années, décrit comment acquérir le plus

efficacement possible des données complexes, sachant qu'elles vérifient la propriété de parcimonie. Dans le cas de l'holographie acoustique compressée, on sait a priori que notre donnée inconnue (un mode propre) se décompose comme une somme d'un petit nombre de formes élémentaires (des ondes planes) parmi une infinité – ou au moins un catalogue important – d'ondes planes. Le but est de retrouver cette combinaison: on ne sait pas ce qu'elle est, on sait juste qu'elle existe et qu'un petit nombre d'observations judicieusement placées peut la révéler.

la carte des vibrations. Il faut répartir de façon aléatoire les microphones pour maximiser l'information de l'hologramme. Lorsque la surface est régulière, nous plaçons en pratique les microphones de façon irrégulière, mais raisonnable par rapport aux contraintes physiques de la structure de l'antenne et nous vérifions que l'information enregistrée sera suffisante. En revanche, si la surface vibrante est de forme irrégulière, l'information est maximisée même avec un placement régulier de micros. Ce principe, dit d'incohérence, est crucial pour que l'algorithme de reconstruction parcimonieuse fonctionne bien; il impose donc des contraintes lors de l'enregistrement du son.

Dans le cas d'une table d'harmonie de guitare, le résultat de l'holographie compressée est excellent: avec une antenne de quelques dizaines de micros et une seule mesure, les modes de vibration sont parfaitement identifiés. Ainsi, en « transférant » une partie de la complexité depuis le matériel vers le logiciel, nous obtenons une technique rapide (deux secondes pour l'acquisition, quelques minutes de calcul), peu onéreuse (moins de micros, possibilité dans un futur très proche d'utiliser des micros numériques similaires à ceux des téléphones portables, très peu coûteux) et simple à mettre en place.

Reste à savoir si la technique sera adoptée dans le monde de la lutherie, et plus largement par celui de l'imagerie acoustique... ■

BIBLIOGRAPHIE

J. ESPIAU DE LAMAËSTRE ET AL., Écouter pour voir, *Interstices* (revue numérique): <http://bit.ly/inters-EPV>

G. CHARDON ET AL., Nearfield acoustic holography using sparsity and compressive sampling principles, *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 132, 1521, 2012.

C. BARDOS, Les ondes, entre physique et mathématiques, *Pour la Science*, n° 409, novembre 2011.