

L'ESSENTIEL

● La répartition des nombres premiers est un défi pour les mathématiciens. La fonction *zêta* de Riemann apporte des informations sur cette répartition.

● Cette fonction *zêta*, au départ définie pour

une variable complexe s de partie réelle $\text{Re}(s)$ supérieure à 1, peut être prolongée à tout le plan complexe, à l'exception du point $s=1$.

● D'après la conjecture de Riemann, les zéros non triviaux (pour lesquels

la fonction *zêta* s'annule) se trouvent tous sur la droite verticale $\text{Re}(s)=1/2$. Cette conjecture semble vraie, mais reste indémontrée.

● Un million de dollars est promis à qui apportera la preuve de cette hypothèse.

LES AUTEURS



PETER MEIER est assistant à l'Institut de mathématiques de l'université de Würzburg, en Allemagne.



JÖRN STEUDING est professeur à l'Institut de mathématiques de l'université de Würzburg, en Allemagne.

L'hypothèse qui valait un million

La fonction *zêta* de Riemann est la clé de nombreux résultats de la théorie des nombres, notamment sur la répartition des nombres premiers. Mais ces résultats dépendent d'une hypothèse qui, depuis 160 ans, résiste aux assauts des mathématiciens.

L

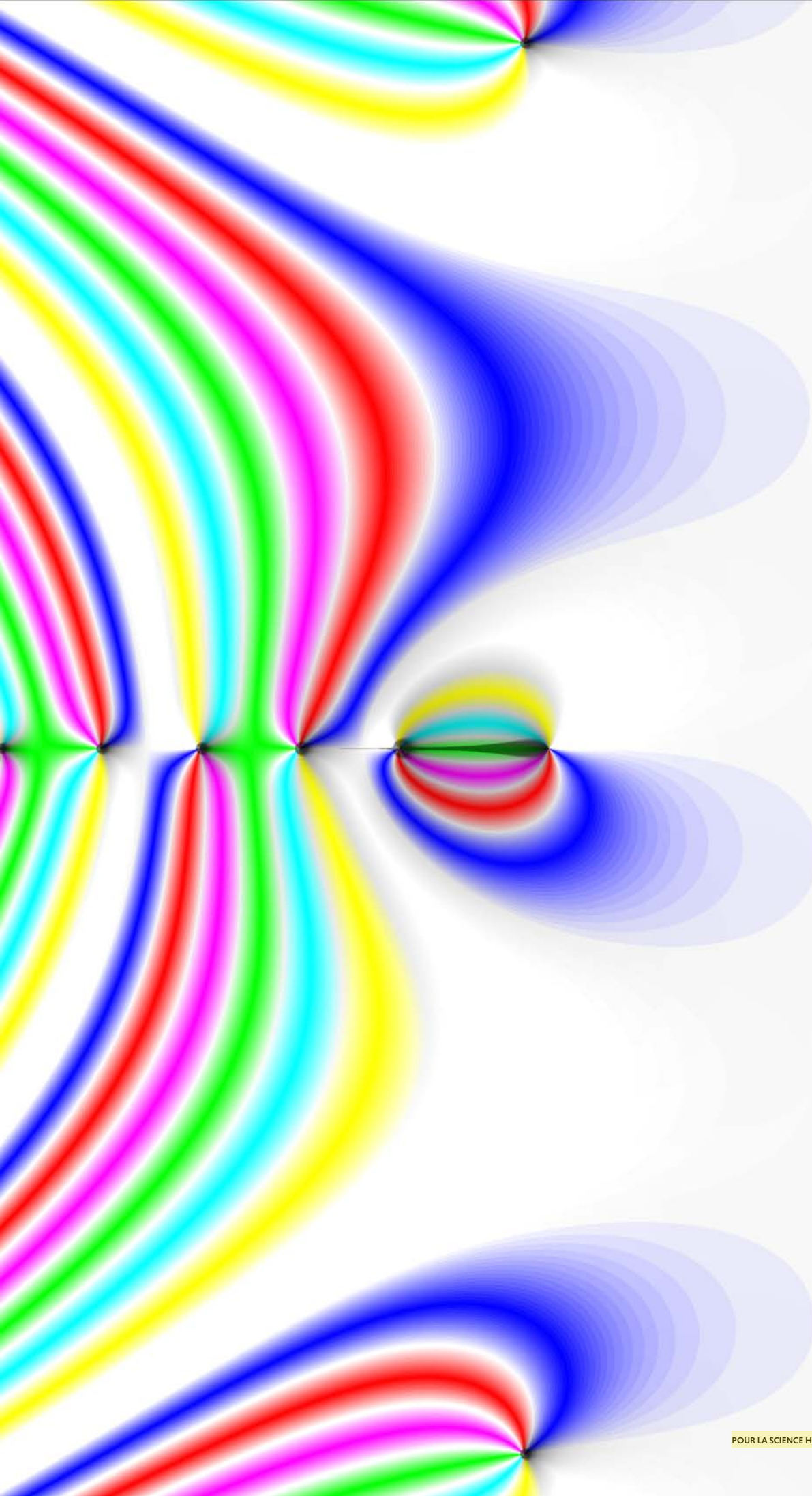
ors du deuxième Congrès international des mathématiciens, à Paris, en août 1900, le mathématicien David Hilbert dresse une liste de vingt-trois problèmes alors irrésolus. Selon lui, ils montraient la voie vers le xx^e siècle. Où en est-on aujourd'hui? Quelques-uns, environ une dizaine, ont été résolus,

parfois assez rapidement. D'autres ne le sont que partiellement. D'autres encore continuent de résister aux assauts des plus grands mathématiciens. Il en est ainsi du huitième problème qui rassemble trois conjectures portant sur les nombres premiers. L'une d'elles est l'hypothèse de Riemann, et elle semble si difficile qu'elle figure désormais parmi les sept défis mathématiques réputés insurmontables, posés par l'institut de mathématiques Clay en 2000 (un seul a été relevé depuis): chacun est doté d'un prix de un million de dollars pour qui en apportera la preuve... En quoi consiste cette hypothèse?

LE PRINCE IMPRESSIONNÉ

Le mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826-1866) accomplit durant sa courte vie une multitude de prouesses. Il impressionna même le «prince des mathématiques», Carl Friedrich Gauss, par les nouvelles méthodes de nature topologique qu'il introduisit en analyse complexe et par la

La fonction *zêta* de Riemann, ζ , est calculée pour les points du plan complexe $s=x+iy$. Dans le domaine présenté, x varie entre -10 et $+20$ et y entre -15 et $+15$. La valeur $\zeta(s)$ est aussi un nombre complexe de module ρ et d'argument τ : $\zeta(s)=\{\rho, \tau\}$. L'ensemble des valeurs calculées $\zeta(s)$ est représenté comme une surface vue de dessus, chaque point (x, y) ayant comme élévation le module ρ et comme couleur une fonction de l'argument τ . Les zéros (triviaux et non triviaux) sont les creux dans la surface ($\rho=0$) où «convergent» toutes les couleurs (τ est indéterminé).



D'UN PRODUIT INFINI À UNE SOMME INFINIE

Chaque facteur $1/(1-1/p^s)$ dans le produit eulérien infini peut lui-même s'écrire comme une somme infinie. En effet, d'après la formule donnant la somme d'une série géométrique de raison $0 < r < 1$, on a :

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots = \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Le produit eulérien s'écrit donc comme un produit infini de sommes infinies :

$$(1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \dots) \cdot (1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + \dots) \cdot (1 + 5^{-s} + \dots) \dots$$

En développant, on obtient la somme (infinie) de tous les produits possibles obtenus en prenant un terme dans chacune des parenthèses. C'est donc la somme de tous les produits possibles de puissances de nombres premiers (on inclut 1 parmi les puissances). Mais à cause de l'unicité de la décomposition d'un nombre entier en un produit de puissances de nombres premiers, c'est aussi exactement la somme des $1/n^s$ pour tous les entiers n , et l'on retrouve la fonction zêta. Comme pour tous les calculs avec une infinité de termes, on doit s'assurer que les manipulations indiquées sont permises, ce qui est le cas ici.

> géométrie aujourd'hui nommée riemannienne. À cela s'ajoutent des travaux remarquables de géométrie différentielle et sur les équations différentielles, au rôle si important dans les sciences de la nature, des mémoires de physique mathématique, une fondation théorique de la notion d'intégration et bien d'autres choses.

Un seul article de la plume de Riemann concerne la théorie des nombres : « Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée ». Ce texte aussi témoigne du génie de son auteur. Il contient de nombreuses conjectures qui n'ont été prouvées que plusieurs décennies plus tard. Ainsi qu'une autre que Riemann commente de façon lapidaire : « Il serait à désirer sans doute que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins, j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude. »

« CAR ELLE PARAÎT SUPERFLUE »

Domage... La démonstration que Riemann avait « laissée de côté pour le moment » continue de faire défaut. Et ce qu'il voulait prouver est devenu célèbre sous le nom de conjecture ou hypothèse de Riemann.

En fait, la conjecture de Riemann revêt une importance considérable en théorie des nombres. Sa démonstration donnerait un fondement plus solide à des centaines de travaux mathématiques qui supposent vraie l'assertion de Riemann. Ces résultats concernent en particulier l'ensemble des nombres premiers.

D'un côté, ils constituent les « atomes » indispensables du royaume des nombres : chaque entier peut être décomposé de façon unique, à l'ordre près des facteurs, en un produit de puissances de nombres premiers. De l'autre côté, ils incarnent en quelque sorte l'irrégularité, ce qui reste lorsqu'on a éliminé tout ce qui est régulier, c'est-à-dire les multiples de 2, de 3... bref, les nombres composés. Précisément en raison de cette irrégularité, les nombres premiers sont très difficiles à saisir.

De nombreuses questions élémentaires sur les nombres premiers restent aujourd'hui sans réponse, ou du moins sans réponse satisfaisante. En voici trois parmi les plus saillantes :

Comment les nombres premiers sont-ils répartis parmi les nombres entiers ? Existe-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux (voir *Des jumeaux, des cousins et... des nombres sexy*, par B. Martin, page 60) ? Tout entier pair supérieur ou égal à 4 est-il la somme de deux nombres premiers ?

La dernière question est nommée conjecture de Goldbach et fait aussi partie du huitième problème de Hilbert. On sait que les exceptions à cette conjecture, si elles existent, doivent être des nombres gigantesques, mais une réponse définitive semble inaccessible par les méthodes actuelles. Il en est de même pour la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Quant à la première question, qui porte sur la répartition des nombres premiers, nous disposons de certains résultats. Nous les devons pour l'essentiel à une idée introduite par le Suisse Leonhard Euler (1707-1783) : on construit un nouvel objet mathématique où chacun des nombres premiers (qui sont en nombre infini) contribue, puis on essaie de l'analyser le plus complètement possible. L'objet porte aujourd'hui le nom de fonction zêta (zêta étant la lettre grecque ζ) et est défini par :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Autrement dit, on prend tous les nombres entiers n élevés à la puissance s , où s est pour l'instant un nombre réel quelconque, on en prend les inverses et on additionne (comme on le verra, on peut exprimer cette fonction à partir des seuls nombres premiers). Le signe Σ (la lettre grecque *sigma* majuscule) est l'abréviation usuelle pour une somme.

La somme ainsi définie comporte une infinité de termes, ce qui ne donne pas toujours une valeur finie. On doit plus rigoureusement définir la somme comme une limite, et celle-ci n'existe pas toujours. Si on prend par exemple $s=1$, on obtient la série dite harmonique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$