

D'UN PRODUIT INFINI À UNE SOMME INFINIE

Chaque facteur $1/(1-1/p^s)$ dans le produit eulérien infini peut lui-même s'écrire comme une somme infinie. En effet, d'après la formule donnant la somme d'une série géométrique de raison $0 < r < 1$, on a :

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots = \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Le produit eulérien s'écrit donc comme un produit infini de sommes infinies :

$$(1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \dots) \cdot (1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + \dots) \cdot (1 + 5^{-s} + \dots) \dots$$

En développant, on obtient la somme (infinie) de tous les produits possibles obtenus en prenant un terme dans chacune des parenthèses. C'est donc la somme de tous les produits possibles de puissances de nombres premiers (on inclut 1 parmi les puissances). Mais à cause de l'unicité de la décomposition d'un nombre entier en un produit de puissances de nombres premiers, c'est aussi exactement la somme des $1/n^s$ pour tous les entiers n , et l'on retrouve la fonction zêta. Comme pour tous les calculs avec une infinité de termes, on doit s'assurer que les manipulations indiquées sont permises, ce qui est le cas ici.

➤ géométrie aujourd'hui nommée riemannienne. À cela s'ajoutent des travaux remarquables de géométrie différentielle et sur les équations différentielles, au rôle si important dans les sciences de la nature, des mémoires de physique mathématique, une fondation théorique de la notion d'intégration et bien d'autres choses.

Un seul article de la plume de Riemann concerne la théorie des nombres : « Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée ». Ce texte aussi témoigne du génie de son auteur. Il contient de nombreuses conjectures qui n'ont été prouvées que plusieurs décennies plus tard. Ainsi qu'une autre que Riemann commente de façon lapidaire : « Il serait à désirer sans doute que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins, j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude. »

« CAR ELLE PARAÎT SUPERFLUE »

Domage... La démonstration que Riemann avait « laissée de côté pour le moment » continue de faire défaut. Et ce qu'il voulait prouver est devenu célèbre sous le nom de conjecture ou hypothèse de Riemann.

En fait, la conjecture de Riemann revêt une importance considérable en théorie des nombres. Sa démonstration donnerait un fondement plus solide à des centaines de travaux mathématiques qui supposent vraie l'assertion de Riemann. Ces résultats concernent en particulier l'ensemble des nombres premiers.

D'un côté, ils constituent les « atomes » indispensables du royaume des nombres : chaque entier peut être décomposé de façon unique, à l'ordre près des facteurs, en un produit de puissances de nombres premiers. De l'autre côté, ils incarnent en quelque sorte l'irrégularité, ce qui reste lorsqu'on a éliminé tout ce qui est régulier, c'est-à-dire les multiples de 2, de 3... bref, les nombres composés. Précisément en raison de cette irrégularité, les nombres premiers sont très difficiles à saisir.

De nombreuses questions élémentaires sur les nombres premiers restent aujourd'hui sans réponse, ou du moins sans réponse satisfaisante. En voici trois parmi les plus saillantes :

Comment les nombres premiers sont-ils répartis parmi les nombres entiers ? Existe-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux (voir *Des jumeaux, des cousins et... des nombres sexy*, par B. Martin, page 60) ? Tout entier pair supérieur ou égal à 4 est-il la somme de deux nombres premiers ?

La dernière question est nommée conjecture de Goldbach et fait aussi partie du huitième problème de Hilbert. On sait que les exceptions à cette conjecture, si elles existent, doivent être des nombres gigantesques, mais une réponse définitive semble inaccessible par les méthodes actuelles. Il en est de même pour la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Quant à la première question, qui porte sur la répartition des nombres premiers, nous disposons de certains résultats. Nous les devons pour l'essentiel à une idée introduite par le Suisse Leonhard Euler (1707-1783) : on construit un nouvel objet mathématique où chacun des nombres premiers (qui sont en nombre infini) contribue, puis on essaie de l'analyser le plus complètement possible. L'objet porte aujourd'hui le nom de fonction zêta (zêta étant la lettre grecque ζ) et est défini par :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Autrement dit, on prend tous les nombres entiers n élevés à la puissance s , où s est pour l'instant un nombre réel quelconque, on en prend les inverses et on additionne (comme on le verra, on peut exprimer cette fonction à partir des seuls nombres premiers). Le signe Σ (la lettre grecque *sigma* majuscule) est l'abréviation usuelle pour une somme.

La somme ainsi définie comporte une infinité de termes, ce qui ne donne pas toujours une valeur finie. On doit plus rigoureusement définir la somme comme une limite, et celle-ci n'existe pas toujours. Si on prend par exemple $s=1$, on obtient la série dite harmonique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$