comprend que l'on peut traiter de géométrie à partir des coordonnées (des nombres donc) et qu'à l'inverse, on peut étudier des courbes (de la géométrie) à partir de leurs équations. La géométrie devient en quelque sorte la même chose que l'algèbre !

Un deuxième grand moment, inverse, a eu lieu dans la deuxième moitié du XX^e siècle. Au lieu d'expliquer la géométrie par l'algèbre, au lieu de décrire un cercle par son équation $x^2+y^2=1$ (c'est l'approche cartésienne), Alexandre Grothendieck, et bien d'autres, ont expliqué les nombres par la géométrie. Les nombres entiers forment des espaces sur lesquels on peut faire de la géométrie ! Sans cette vision géométrique de l'arithmétique, par exemple, on ne serait jamais arrivé à démontrer le théorème de Fermat.

En construisant sans cesse ces passerelles, ne va-t-on pas aboutir à une sorte d'unité globale ?

Étienne Ghys : J'aime les mathématiques sans aucun doute à cause de cette unité. Les mathématiques explosent en quantité, les connaissances augmentent de façon exponentielle (ce que l'on sait aujourd'hui est sans commune mesure avec ce que l'on connaissait il y a seulement cent ans), mais elles conservent une cohérence indiscutable. Les mathématiques ont réussi à croître non pas comme un arbre, mais plutôt comme une nébuleuse connexe : il y a des passerelles dans tous les sens, je trouve ça vraiment remarquable. La structure des mathématiques évoque un graphe expanseur, un sujet mathématique aujourd'hui très à la mode.

De quoi s'agit-il ?

Étienne Ghys : Lors du dernier congrès international de mathématiques, plusieurs conférences plénières en parlaient. Imaginons un graphe en forme d'arbre. En retirant un sommet à l'intérieur, on obtient deux morceaux, deux graphes plus petits. Les graphes expanseurs sont à l'opposé : on a du mal à les couper en deux morceaux de taille significative. On a beau retirer des sommets, le graphe reste d'un seul tenant. Les graphes expanseurs ont une propriété d'hyperconnectivité. Internet, un graphe d'environ 10 milliards de sommets, est un exemple. Le nombre de pages Internet qu'il faudrait fermer pour couper le monde en deux parties de grande taille qui ne communiqueraient plus est très grand.

Le mathématicien russe Gregori Margulis, aujourd'hui à l'université Yale, aux États-Unis, en a construit dans les années 1980. C'est un sujet vraiment intéressant et qui, en passant, est relié à l'arithmétique.

De quelle façon ?

Étienne Ghys : Au début, dans les années 1970, on avait démontré l'existence de tels graphes par des moyens probabilistes, mais on n'en connaissait aucun que l'on pouvait décrire de façon explicite. Finalement, Gregori Margulis y est parvenu en utilisant les nombres premiers et des graphes dits de Cayley (qui encodent la structure d'un groupe). En d'autres termes, aujourd'hui on peut construire explicitement de grands graphes expanseurs grâce aux nombres premiers.

Gregori Margulis est un grand mathématicien. Médaille Fields en 1978, il n'a pas pu venir chercher sa récompense à Helsinki, parce que l'Union soviétique ne l'a pas autorisé à sortir de son pays. Il a donc envoyé sa conférence par la poste et c'est Jacques Tits, Prix Abel en 2008, qui l'a lue. Elle annonçait la démonstration du théorème d'arithméticité, un résultat absolument extraordinaire. Il continue à travailler aujourd'hui, sur de nombreux sujets.

Est-ce que les nombres ont leur place dans votre spécialité, la géométrie et les systèmes dynamiques ?

Étienne Ghys : Et comment ! C'est justement un de ces nombreux exemples de connexion entre des domaines qu'on pensait indépendants. Dans ce cas précis, les systèmes dynamiques ont remis de l'ordre dans les nombres.

Il s'agit d'une question d'approximation diophantienne. L'idée est d'approcher un nombre irrationnel et de s'intéresser à la qualité de l'approximation. Par exemple, je peux approcher le nombre π par 22/7, mais aussi par 355/113. Quel est le lien entre l'erreur commise et la taille du numérateur et du dénominateur du nombre rationnel ? Cette question est un sujet majeur.

Les mathématiques explosent en quantité, le savoir augmente de façon exponentielle

Certains nombres, dits de Liouville sont très bien approchés par des nombres rationnels. Pourquoi ? Par exemple, construisons le nombre suivant : un « 0 », une virgule, un « 1 », 10 000 « 0 », un « 1 », un million de « 0 », un « 1 », un milliard de « 0 », un « 1 », un milliard de milliards de milliards de milliards de « 0 », encore un « 1 »... Dans son écriture décimale, ce nombre est essentiellement constitué de « 0 », avec de temps en temps, et de plus en plus rarement un « 1 ». Il est bien sûr irrationnel, car les décimales ne sont pas périodiques, mais il est extrêmement bien approché par un nombre rationnel puisque si je m'arrête par exemple au dix millième « 1 », les « 0 » qui suivent sont tellement nombreux que l'erreur commise en le tronquant à ce niveau est microscopique. Ce nombre est *presque* rationnel. Or un très ancien théorème de Liouville, de la fin XIX^e siècle, affirme qu'un tel nombre est nécessairement transcendant. C'était la première fois que l'on mettait en évidence cette propriété !

Elle signifie que le nombre en question ne peut pas être solution d'une équation à coefficients entiers. C'est le cas de π, de e... Mais à cette époque, on l'ignorait.

Maintenant, à l'opposé, on trouve... le nombre d'or. Le nombre d'or est irrationnel, Platon le savait, Euclide en parle... Et il est très mal approché par des rationnels. On parle alors de nombres diophantiens.

Un autre théorème du début du XX^e siècle va nous conduire à la dynamique. Il stipule que le nombre d'or (ainsi que quelques autres qui lui sont très reliés) est le pire de ces nombres diophantiens : aucun autre nombre n'est aussi loin des rationnels. L'image est saisissante !

À cette aune, quel nombre suit le nombre d'or ? C'est le nombre d'argent, qui correspond à $\sqrt{2}$. Il est très mal approché par les nombres rationnels, mais l'est un peu mieux que le nombre d'or. Viennent >