

D'UN PRODUIT INFINI À UNE SOMME INFINIE

Chaque facteur $1/(1-1/p^s)$ dans le produit eulérien infini peut lui-même s'écrire comme une somme infinie. En effet, d'après la formule donnant la somme d'une série géométrique de raison $0 < r < 1$, on a :

$$1 + p^{-s} + p^{-2s} + \dots = \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Le produit eulérien s'écrit donc comme un produit infini de sommes infinies :

$$(1 + 2^{-s} + 2^{-2s} + \dots) \cdot (1 + 3^{-s} + 3^{-2s} + \dots) \cdot (1 + 5^{-s} + \dots) \dots$$

En développant, on obtient la somme (infinie) de tous les produits possibles obtenus en prenant un terme dans chacune des parenthèses. C'est donc la somme de tous les produits possibles de puissances de nombres premiers (on inclut 1 parmi les puissances). Mais à cause de l'unicité de la décomposition d'un nombre entier en un produit de puissances de nombres premiers, c'est aussi exactement la somme des $1/n^s$ pour tous les entiers n , et l'on retrouve la fonction zêta. Comme pour tous les calculs avec une infinité de termes, on doit s'assurer que les manipulations indiquées sont permises, ce qui est le cas ici.

> géométrie aujourd'hui nommée riemannienne. À cela s'ajoutent des travaux remarquables de géométrie différentielle et sur les équations différentielles, au rôle si important dans les sciences de la nature, des mémoires de physique mathématique, une fondation théorique de la notion d'intégration et bien d'autres choses.

Un seul article de la plume de Riemann concerne la théorie des nombres : « Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée ». Ce texte aussi témoigne du génie de son auteur. Il contient de nombreuses conjectures qui n'ont été prouvées que plusieurs décennies plus tard. Ainsi qu'une autre que Riemann commente de façon lapidaire : « Il serait à désirer sans doute que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins, j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux, car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude. »

« CAR ELLE PARAÎT SUPERFLUE »

Domage... La démonstration que Riemann avait « laissée de côté pour le moment » continue de faire défaut. Et ce qu'il voulait prouver est devenu célèbre sous le nom de conjecture ou hypothèse de Riemann.

En fait, la conjecture de Riemann revêt une importance considérable en théorie des nombres. Sa démonstration donnerait un fondement plus solide à des centaines de travaux mathématiques qui supposent vraie l'assertion de Riemann. Ces résultats concernent en particulier l'ensemble des nombres premiers.

D'un côté, ils constituent les « atomes » indispensables du royaume des nombres : chaque entier peut être décomposé de façon unique, à l'ordre près des facteurs, en un produit de puissances de nombres premiers. De l'autre côté, ils incarnent en quelque sorte l'irrégularité, ce qui reste lorsqu'on a éliminé tout ce qui est régulier, c'est-à-dire les multiples de 2, de 3... bref, les nombres composés. Précisément en raison de cette irrégularité, les nombres premiers sont très difficiles à saisir.

De nombreuses questions élémentaires sur les nombres premiers restent aujourd'hui sans réponse, ou du moins sans réponse satisfaisante. En voici trois parmi les plus saillantes :

Comment les nombres premiers sont-ils répartis parmi les nombres entiers ? Existe-t-il une infinité de nombres premiers jumeaux (voir *Des jumeaux, des cousins et... des nombres sexy*, par B. Martin, page 60) ? Tout entier pair supérieur ou égal à 4 est-il la somme de deux nombres premiers ?

La dernière question est nommée conjecture de Goldbach et fait aussi partie du huitième problème de Hilbert. On sait que les exceptions à cette conjecture, si elles existent, doivent être des nombres gigantesques, mais une réponse définitive semble inaccessible par les méthodes actuelles. Il en est de même pour la conjecture des nombres premiers jumeaux.

Quant à la première question, qui porte sur la répartition des nombres premiers, nous disposons de certains résultats. Nous les devons pour l'essentiel à une idée introduite par le Suisse Leonhard Euler (1707-1783) : on construit un nouvel objet mathématique où chacun des nombres premiers (qui sont en nombre infini) contribue, puis on essaie de l'analyser le plus complètement possible. L'objet porte aujourd'hui le nom de fonction zêta (zêta étant la lettre grecque ζ) et est défini par :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Autrement dit, on prend tous les nombres entiers n élevés à la puissance s , où s est pour l'instant un nombre réel quelconque, on en prend les inverses et on additionne (comme on le verra, on peut exprimer cette fonction à partir des seuls nombres premiers). Le signe Σ (la lettre grecque *sigma* majuscule) est l'abréviation usuelle pour une somme.

La somme ainsi définie comporte une infinité de termes, ce qui ne donne pas toujours une valeur finie. On doit plus rigoureusement définir la somme comme une limite, et celle-ci n'existe pas toujours. Si on prend par exemple $s=1$, on obtient la série dite harmonique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

qui tend vers l'infini. Si l'on choisit $s < 1$, chaque terme de la somme est plus grand que pour $s = 1$, la somme est donc *a fortiori* infinie. Mais si $s > 1$, la série prend une valeur finie, et on dit qu'elle converge.

La propriété cruciale de la fonction $\zeta(s)$ est qu'on peut l'exprimer, du moins pour $s > 1$, comme un produit infini de termes correspondant chacun à un nombre premier. En effet, on a :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Le p_i majuscule, Π , symbolise le produit des termes successifs. Il porte ici sur tous les nombres premiers p , et s'appelle dans ce cas un produit eulérien (voir l'encadré page ci-contre).

Il est en fait possible de prolonger la fonction ζ en une fonction qui associe à tout nombre réel s différent de 1 une valeur unique bien déterminée. Le calcul de cette valeur dans des cas particuliers donne d'ailleurs lieu à des résultats intéressants; par exemple, un autre exploit d'Euler est l'étonnante formule (voir l'encadré page suivante) :

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Mais ce ne sont pas ces valeurs particulières qui nous intéressent ici. Il s'agit plutôt de traduire des assertions sur les nombres premiers en propriétés de la fonction ζ , parce qu'avec cette fonction une vaste boîte à outils

devient disponible. Parmi les nombreuses méthodes ainsi accessibles, figurent la dérivation et l'intégration, mais aussi et surtout l'arsenal de l'analyse complexe.

L'IDÉE CLÉ DE RIEMANN

L'idée clé de Riemann a été de ne plus étudier $\zeta(s)$ seulement comme une fonction réelle de la variable réelle s , mais comme une fonction d'une variable complexe (voir l'encadré ci-dessous). La définition initiale de la fonction reste la même, mais la variable s peut désormais prendre des valeurs complexes. Un terme tel que n^s avec un exposant complexe sera défini comme $\exp(s \ln n)$, les fonctions exponentielle ($\exp$) et logarithme ($\ln$) étant définies dans le domaine complexe par des séries de puissances entières; par exemple, on a pour tout nombre complexe z : $\exp(z) = e^z = 1 + z/1! + z^2/2! + z^3/3! + \dots$

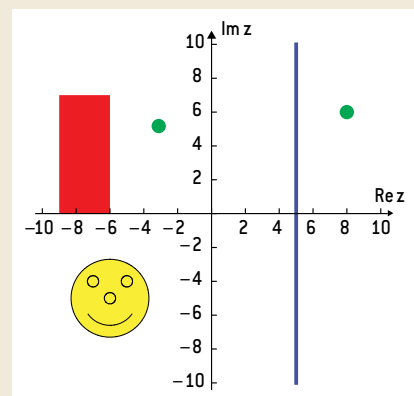
Certaines choses changent peu dans cette extension aux nombres complexes. La série d'Euler converge pour s réel supérieur à 1; cette condition devient maintenant que la partie réelle de s , notée $\operatorname{Re}(s)$, soit supérieure à 1. Sur la droite réelle, le point 1 est la barrière qui bloque la convergence de la série; dans le plan complexe, cette barrière est la droite de tous les nombres dont la partie réelle est 1.

Mais les nombres complexes offrent aussi la possibilité de regarder la fonction définie par la série d'Euler sous un autre angle. Le procédé, nommé « prolongement »

NOMBRES COMPLEXES ET FONCTIONS COMPLEXES

Un nombre complexe est un nombre de la forme $a + ib$, où a et b sont deux nombres réels et i un nombre imaginaire vérifiant, par définition, $i^2 = -1$. Les nombres complexes sont ainsi une extension des nombres réels – motivée, entre autres, par le désir que toute équation algébrique ait une solution. On peut représenter les nombres complexes par des points dans le plan (on parle de plan complexe, ou de plan de Gauss-Argand). Le nombre $z = a + ib$ est ainsi représenté par le point de coordonnées (a, b) , où a est la « partie réelle » $\operatorname{Re}(z)$ de z et b sa « partie imaginaire » $\operatorname{Im}(z)$. Les nombres réels sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle. Les opérations élémentaires, mais aussi la notion de limite, fonctionnent comme pour les nombres réels. On peut donc définir des séries de puissances entières, fonctions de la forme : $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ La valeur de f en chaque point z (complexe) est donc définie par une somme infinie. Les coefficients a_i peuvent

aussi être des nombres complexes. Les fonctions de ce genre sont dites analytiques. Les fonctions analytiques, qui ont de nombreuses propriétés intéressantes et fécondes, font l'objet de tout un domaine des mathématiques, l'analyse complexe. Des propriétés remarquables ou mystérieuses que présente une fonction analytique réelle apparaissent souvent sous un autre jour et bien plus clairement lorsque l'on examine la fonction complexe correspondante. L'une des propriétés les plus intéressantes des fonctions complexes est le « prolongement analytique » : les séries de puissances entières comme précédemment convergent seulement dans un disque autour du point central z_0 . Ce disque ne peut s'étendre que jusqu'à la première singularité rencontrée. Mais rien n'empêche d'évaluer la série autour d'un autre point. Elle a alors un nouveau disque de convergence et celui-ci peut en partie empiéter sur l'ancien. On peut ainsi étendre de proche en proche le domaine de définition d'une fonction analytique.



Dans ce plan de Gauss-Argand ont été figurés les deux points (en vert) $8 + 6i$ et $-3 + 5i$, la droite de tous les nombres complexes de partie réelle 5 (en bleu), le domaine de tous les nombres complexes de partie réelle comprise entre -9 et -6 et de partie imaginaire comprise entre 0 et 7 (en rouge), ainsi que quelques cercles et arcs de cercle (en jaune).