

qui tend vers l'infini. Si l'on choisit $s < 1$, chaque terme de la somme est plus grand que pour $s = 1$, la somme est donc *a fortiori* infinie. Mais si $s > 1$, la série prend une valeur finie, et on dit qu'elle converge.

La propriété cruciale de la fonction $\zeta(s)$ est qu'on peut l'exprimer, du moins pour $s > 1$, comme un produit infini de termes correspondant chacun à un nombre premier. En effet, on a :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Le p_i majuscule, Π , symbolise le produit des termes successifs. Il porte ici sur tous les nombres premiers p , et s'appelle dans ce cas un produit eulérien (voir l'encadré page ci-contre).

Il est en fait possible de prolonger la fonction ζ en une fonction qui associe à tout nombre réel s différent de 1 une valeur unique bien déterminée. Le calcul de cette valeur dans des cas particuliers donne d'ailleurs lieu à des résultats intéressants ; par exemple, un autre exploit d'Euler est l'étonnante formule (voir l'encadré page suivante) :

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Mais ce ne sont pas ces valeurs particulières qui nous intéressent ici. Il s'agit plutôt de traduire des assertions sur les nombres premiers en propriétés de la fonction ζ , parce qu'avec cette fonction une vaste boîte à outils

devient disponible. Parmi les nombreuses méthodes ainsi accessibles, figurent la dérivation et l'intégration, mais aussi et surtout l'arsenal de l'analyse complexe.

L'IDÉE CLÉ DE RIEMANN

L'idée clé de Riemann a été de ne plus étudier $\zeta(s)$ seulement comme une fonction réelle de la variable réelle s , mais comme une fonction d'une variable complexe (voir l'encadré ci-dessous). La définition initiale de la fonction reste la même, mais la variable s peut désormais prendre des valeurs complexes. Un terme tel que n^s avec un exposant complexe sera défini comme $\exp(s \ln n)$, les fonctions exponentielle ($\exp$) et logarithme ($\ln$) étant définies dans le domaine complexe par des séries de puissances entières ; par exemple, on a pour tout nombre complexe z : $\exp(z) = e^z = 1 + z/1! + z^2/2! + z^3/3! + \dots$

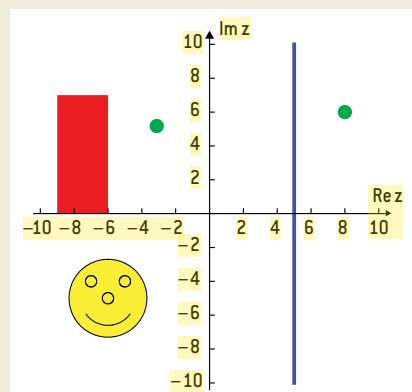
Certaines choses changent peu dans cette extension aux nombres complexes. La série d'Euler converge pour s réel supérieur à 1 ; cette condition devient maintenant que la partie réelle de s , notée $\operatorname{Re}(s)$, soit supérieure à 1. Sur la droite réelle, le point 1 est la barrière qui bloque la convergence de la série ; dans le plan complexe, cette barrière est la droite de tous les nombres dont la partie réelle est 1.

Mais les nombres complexes offrent aussi la possibilité de regarder la fonction définie par la série d'Euler sous un autre angle. Le procédé, nommé « prolongement »

NOMBRES COMPLEXES ET FONCTIONS COMPLEXES

Un nombre complexe est un nombre de la forme $a + ib$, où a et b sont deux nombres réels et i un nombre imaginaire vérifiant, par définition, $i^2 = -1$. Les nombres complexes sont ainsi une extension des nombres réels – motivée, entre autres, par le désir que toute équation algébrique ait une solution. On peut représenter les nombres complexes par des points dans le plan (on parle de plan complexe, ou de plan de Gauss-Argand). Le nombre $z = a + ib$ est ainsi représenté par le point de coordonnées (a, b) , où a est la « partie réelle » $\operatorname{Re}(z)$ de z et b sa « partie imaginaire » $\operatorname{Im}(z)$. Les nombres réels sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle. Les opérations élémentaires, mais aussi la notion de limite, fonctionnent comme pour les nombres réels. On peut donc définir des séries de puissances entières, fonctions de la forme : $f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$ La valeur de f en chaque point z (complexe) est donc définie par une somme infinie. Les coefficients a_i peuvent

aussi être des nombres complexes. Les fonctions de ce genre sont dites analytiques. Les fonctions analytiques, qui ont de nombreuses propriétés intéressantes et fécondes, font l'objet de tout un domaine des mathématiques, l'analyse complexe. Des propriétés remarquables ou mystérieuses que présente une fonction analytique réelle apparaissent souvent sous un autre jour et bien plus clairement lorsque l'on examine la fonction complexe correspondante. L'une des propriétés les plus intéressantes des fonctions complexes est le « prolongement analytique » : les séries de puissances entières comme précédemment convergent seulement dans un disque autour du point central z_0 . Ce disque ne peut s'étendre que jusqu'à la première singularité rencontrée. Mais rien n'empêche d'évaluer la série autour d'un autre point. Elle a alors un nouveau disque de convergence et celui-ci peut en partie empiéter sur l'ancien. On peut ainsi étendre de proche en proche le domaine de définition d'une fonction analytique.



Dans ce plan de Gauss-Argand ont été figurés les deux points (en vert) $8 + 6i$ et $-3 + 5i$, la droite de tous les nombres complexes de partie réelle 5 (en bleu), le domaine de tous les nombres complexes de partie réelle comprise entre -9 et -6 et de partie imaginaire comprise entre 0 et 7 (en rouge), ainsi que quelques cercles et arcs de cercle (en jaune).

> analytique», est d'usage fréquent en analyse complexe. À l'instar d'Euler avec sa représentation de la série sous forme d'un produit, Riemann trouva une autre expression de la fonction *zêta* qui fournit les mêmes valeurs là où cette fonction était définie auparavant, mais qui de plus attribue des valeurs finies pour toutes les autres valeurs complexes de s – à l'exception de $s=1$.

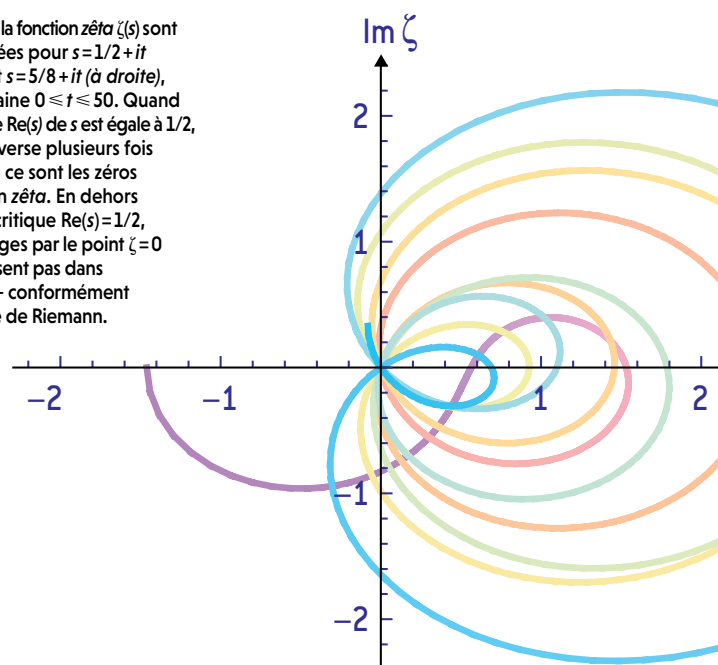
La valeur $s=1$ est pour la fonction *zêta* ce que le mathématicien nomme une singularité. La fonction prend ici inévitablement une valeur infinie. Lorsqu'on se restreint à la droite réelle, la singularité constitue une barrière infranchissable; mais dans le plan, on peut simplement la contourner.

RELIER ZÊTA ET GAMMA

Pour mieux appréhender la fonction *zêta*, Riemann appela à la rescousse une autre fonction, initialement définie elle aussi sur une partie du plan complexe et qui peut également être étendue à presque tout le plan par prolongement analytique: la fonction *gamma* (Γ). Celle-ci généralise la fonction factorielle, c'est-à-dire que pour tout entier positif n , elle vérifie: $\Gamma(n) = n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$.

Pour tous les nombres complexes distincts de $0, -1, -2, -3$, etc., la fonction *gamma* prend des valeurs finies. Grâce aux techniques de la

Les valeurs de la fonction *zêta* $\zeta(s)$ sont ici représentées pour $s=1/2+it$ (à gauche) et $s=5/8+it$ (à droite), dans le domaine $0 \leq t \leq 50$. Quand la partie réelle $\text{Re}(s)$ de s est égale à $1/2$, la courbe traverse plusieurs fois le point $\zeta=0$; ce sont les zéros de la fonction *zêta*. En dehors de la droite critique $\text{Re}(s)=1/2$, de tels passages par le point $\zeta=0$ ne se produisent pas dans ce domaine – conformément à l'hypothèse de Riemann.



théorie des fonctions, Riemann obtint la relation suivante entre les fonctions *zêta* et *gamma*:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Une telle équation, qui relie les valeurs de fonctions en différents points, est qualifiée de fonctionnelle. L'équation fonctionnelle ci-dessus a une propriété particulière: elle est invariante si on y remplace s par $1-s$ et réciproquement. Autrement dit, elle est symétrique par rapport au point $s=1/2$. Comme, en outre, les fonctions concernées restent inchangées lors d'une réflexion par rapport à l'axe réel (à une «conjugaison complexe» près, c'est-à-dire au changement de i en $-i$ près), on a une symétrie par rapport à la droite des nombres complexes de partie réelle égale à $1/2$. On nomme droite critique cet axe de symétrie.

La symétrie mentionnée a d'intéressantes conséquences. Là où la partie réelle de s est supérieure à 1 , on connaît directement la fonction *zêta*, comme expliqué plus haut. On sait ainsi que $\zeta(s)$ n'a là aucun «zéro», c'est-à-dire aucune valeur de s pour laquelle la fonction s'annule, car aucun des facteurs du produit eulérien n'est égal à zéro. Grâce à l'équation fonctionnelle, on peut transposer cette connaissance sur le côté gauche du plan complexe.

Prenons un exemple. Le facteur $\Gamma(s/2)$, qui apparaît dans le membre de gauche de l'équation fonctionnelle, prend aux points $s=0, -2, -4 \dots$ une valeur infinie. Mais si l'on choisit pour s l'une de ces valeurs ($s=-2n$ pour un entier naturel n), le membre de droite de l'équation

UNE FORMULE REMARQUABLE

Leonhard Euler a obtenu la formule $1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 \dots = \pi^2/6$ en représentant non pas la fonction *zêta* $\zeta(s)$, mais la fonction $(\sin x)/x$, de deux façons: d'une part comme une somme infinie, d'autre part comme un produit infini. Des multiplications et transformations habiles le conduisirent ensuite au résultat. Plus généralement, Euler trouva la formule:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$$

Le nombre B_j est le j -ème «nombre de Bernoulli». Ces nombres peuvent être introduits par exemple par des suites définies par récurrence ou par des séries infinies (voir <http://bit.ly/Bern-Nu>). Les premiers sont $B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$, $B_4=-1/30$, $B_6=1/42$; pour les nombres impairs $j \geq 3$, on a $B_j=0$.

Une formule simple analogue pour les valeurs de la fonction (s) quand la variable est un entier positif impair n'est pas connue; on sait toutefois que la valeur de $\zeta(3)$ est irrationnelle (un remarquable résultat de Roger Apéry datant de 1978). Autres exemples, Tanguy Rivoal a montré en 2000 qu'il existe une infinité de nombres irrationnels parmi les valeurs prises par $\zeta(s)$ pour les entiers impairs, et Wadim Zudilin a prouvé en 2001 que parmi les quatre nombres $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ et $\zeta(11)$, l'un au moins est irrationnel.

Par ailleurs, on peut écrire aussi $\zeta(2)$ sous la forme d'un produit:

$$\zeta(2) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Comme π^2 est irrationnel, le nombre de facteurs dans le produit ne peut être fini (sinon, le résultat serait rationnel). C'est l'une des nombreuses preuves de l'infinité des nombres premiers.