

- analytique», est d'usage fréquent en analyse complexe. À l'instar d'Euler avec sa représentation de la série sous forme d'un produit, Riemann trouva une autre expression de la fonction *zêta* qui fournit les mêmes valeurs là où cette fonction était définie auparavant, mais qui de plus attribue des valeurs finies pour toutes les autres valeurs complexes de s – à l'exception de $s=1$.

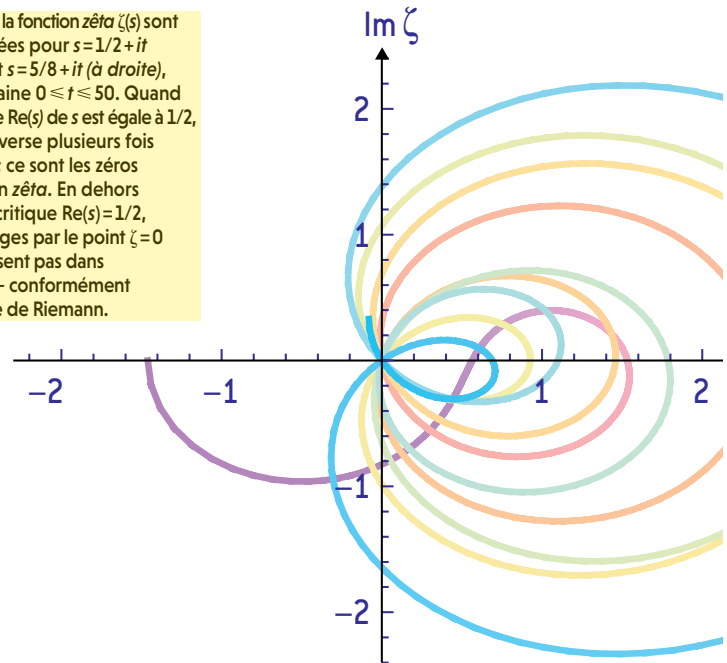
La valeur $s=1$ est pour la fonction *zêta* ce que le mathématicien nomme une singularité. La fonction prend ici inévitablement une valeur infinie. Lorsqu'on se restreint à la droite réelle, la singularité constitue une barrière infranchissable; mais dans le plan, on peut simplement la contourner.

RELIER ZÊTA ET GAMMA

Pour mieux appréhender la fonction *zêta*, Riemann appela à la rescousse une autre fonction, initialement définie elle aussi sur une partie du plan complexe et qui peut également être étendue à presque tout le plan par prolongement analytique: la fonction *gamma* (Γ). Celle-ci généralise la fonction factorielle, c'est-à-dire que pour tout entier positif n , elle vérifie: $\Gamma(n) = n! = n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1$.

Pour tous les nombres complexes distincts de $0, -1, -2, -3, \dots$, la fonction *gamma* prend des valeurs finies. Grâce aux techniques de la

Les valeurs de la fonction *zêta* $\zeta(s)$ sont ici représentées pour $s=1/2+it$ (à gauche) et $s=5/8+it$ (à droite), dans le domaine $0 \leq t \leq 50$. Quand la partie réelle $\text{Re}(s)$ de s est égale à $1/2$, la courbe traverse plusieurs fois le point $\zeta=0$; ce sont les zéros de la fonction *zêta*. En dehors de la droite critique $\text{Re}(s)=1/2$, de tels passages par le point $\zeta=0$ ne se produisent pas dans ce domaine – conformément à l'hypothèse de Riemann.



théorie des fonctions, Riemann obtint la relation suivante entre les fonctions *zêta* et *gamma*:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

Une telle équation, qui relie les valeurs de fonctions en différents points, est qualifiée de fonctionnelle. L'équation fonctionnelle ci-dessus a une propriété particulière: elle est invariante si on y remplace s par $1-s$ et réciproquement. Autrement dit, elle est symétrique par rapport au point $s=1/2$. Comme, en outre, les fonctions concernées restent inchangées lors d'une réflexion par rapport à l'axe réel (à une «conjugaison complexe» près, c'est-à-dire au changement de i en $-i$ près), on a une symétrie par rapport à la droite des nombres complexes de partie réelle égale à $1/2$. On nomme droite critique cet axe de symétrie.

La symétrie mentionnée a d'intéressantes conséquences. Là où la partie réelle de s est supérieure à 1 , on connaît directement la fonction *zêta*, comme expliqué plus haut. On sait ainsi que $\zeta(s)$ n'a là aucun «zéro», c'est-à-dire aucune valeur de s pour laquelle la fonction s'annule, car aucun des facteurs du produit eulérien n'est égal à zéro. Grâce à l'équation fonctionnelle, on peut transposer cette connaissance sur le côté gauche du plan complexe.

Prenons un exemple. Le facteur $\Gamma(s/2)$, qui apparaît dans le membre de gauche de l'équation fonctionnelle, prend aux points $s=0, -2, -4, \dots$ une valeur infinie. Mais si l'on choisit pour s l'une de ces valeurs ($s=-2n$ pour un entier naturel n), le membre de droite de l'équation

UNE FORMULE REMARQUABLE

Leonhard Euler a obtenu la formule $1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+1/5^2+\dots=\pi^2/6$ en représentant non pas la fonction *zêta* $\zeta(s)$, mais la fonction $(\sin x)/x$, de deux façons: d'une part comme une somme infinie, d'autre part comme un produit infini. Des multiplications et transformations habiles le conduisirent ensuite au résultat. Plus généralement, Euler trouva la formule:

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!}$$

Le nombre B_j est le j -ème «nombre de Bernoulli». Ces nombres peuvent être introduits par exemple par des suites définies par récurrence ou par des séries infinies (voir <http://bit.ly/Bern-Nu>). Les premiers sont $B_0=1, B_1=-1/2, B_2=1/6, B_4=-1/30, B_6=1/42$; pour les nombres impairs $j \geq 3$, on a $B_j=0$. Une formule simple analogue pour les valeurs de la fonction (s) quand la variable est un entier positif impair n'est pas connue; on sait toutefois que la valeur de $\zeta(3)$ est irrationnelle (un remarquable résultat de Roger Apéry datant de 1978). Autres exemples, Tanguy Rivoal a montré en 2000 qu'il existe une infinité de nombres irrationnels parmi les valeurs prises par $\zeta(s)$ pour les entiers impairs, et Wadim Zudilin a prouvé en 2001 que parmi les quatre nombres $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$ et $\zeta(11)$, l'un au moins est irrationnel.

Par ailleurs, on peut écrire aussi $\zeta(2)$ sous la forme d'un produit:

$$\zeta(2) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Comme π^2 est irrationnel, le nombre de facteurs dans le produit ne peut être fini (sinon, le résultat serait rationnel). C'est l'une des nombreuses preuves de l'infinité des nombres premiers.