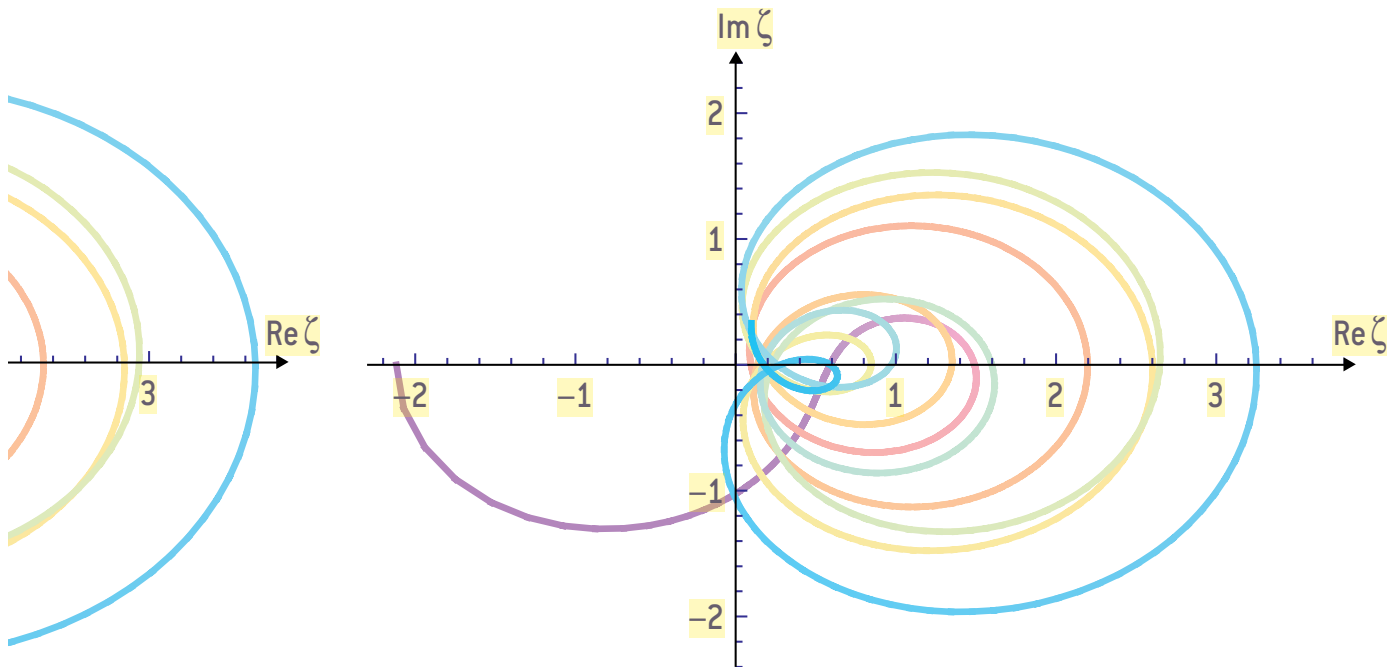




© Peter Meier

fonctionnelle donne une expression finie et non nulle. Comment est-ce possible? La seule possibilité est que $\zeta(s)$ s'annule en ces points, puisque tous les autres facteurs de l'équation fonctionnelle sont non nuls. Ainsi, on en déduit que $\zeta(s) = 0$ pour $s = -2, -4, -6$, etc. Ces valeurs de s sont les «zéros triviaux» de la fonction zêta. Ce sont les seuls zéros dont la partie réelle est négative. Le point $s = 0$ n'est en revanche pas un zéro, car $\zeta(1-s)$ donne la singularité $\zeta(1)$.

Pour tous les s de partie réelle supérieure à 1, il n'existe, comme le montre la représentation en produit eulérien, aucun autre zéro. C'est donc seulement dans la bande étroite des nombres complexes de partie réelle comprise entre 0 et 1, la «bande critique», que peuvent se trouver d'autres zéros. C'est sur ces zéros «non triviaux» que porte la fameuse hypothèse de Riemann.

Riemann a conjecturé qu'il existe une infinité de zéros non triviaux de la fonction zêta. À propos de leur localisation, il a formulé deux assertions précises. L'une concerne leur répartition verticale: le nombre $N(T)$ de zéros dont la partie imaginaire (c'est-à-dire la hauteur au-dessus de l'axe réel) est comprise entre 0 et une valeur T est:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{T}{2\pi} \right) - 1 \right) + \text{terme d'erreur}(T)$$

où le terme d'erreur est petit par rapport à T lorsque T est suffisamment grand. Bien que Riemann ait lui-même donné une idée de la preuve, l'assertion ne fut démontrée complètement que trente ans plus tard, en 1893,

par Hans von Mangoldt. Ce dernier montra aussi que le terme correctif était au plus de l'ordre de $\ln T$.

Quant à la seconde assertion, elle concerne la répartition des zéros horizontalement. Riemann affirma que les zéros non triviaux ne peuvent se trouver qu'au milieu de la bande critique, c'est-à-dire sur la droite critique; autrement dit, les zéros non triviaux ont pour partie réelle $1/2$. C'est cette assertion qui constitue la conjecture de Riemann.

Pourquoi s'intéresse-t-on autant aux zéros de la fonction zêta? Parce qu'ils fournissent des informations sur la répartition des nombres premiers. Il s'agit plus précisément d'une formule évaluant le nombre $\pi(x)$ de tous les nombres premiers inférieurs à x . Gauss avait déjà conjecturé que $\pi(x) \approx x/\ln x$, formule qu'il avait plus tard raffinée en $\pi(x) \approx \text{li}(x)$, où $\text{li}(x)$ est le «logarithme intégral», défini par $\text{li}(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u}$. Le signe $\approx$ signifie ici «à un terme correctif près, qui est petit par rapport à $\text{li}(x)$ pour x assez grand». Plus petit est ce terme correctif, meilleure est la précision de la formule.

MIEUX QUE GAUSS

Or Riemann a réussi à améliorer la prédiction de Gauss quant à $\pi(x)$. Le cœur de son idée est une deuxième représentation en produit, elle-même issue de la théorie des polynômes, c'est-à-dire des fonctions de la forme: $f(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n$

Un polynôme à coefficients a_i complexes et de degré n (n étant la plus haute puissance dont

> le coefficient correspondant n'est pas nul) a exactement n zéros, ou «racines», complexes – c'est le théorème fondamental de l'algèbre. Et si 0 n'est pas lui-même une racine du polynôme, on peut écrire ce dernier sous la forme $a(1-s/s_1)(1-s/s_2)\dots(1-s/s_n)$, où les s_i sont les racines et a une constante appropriée.

La fonction *zêta* n'est bien sûr pas un polynôme. Mais Riemann parvint à l'écrire elle aussi comme un produit de facteurs de la forme $(1-s/\rho)$, où ρ parcourt les zéros non triviaux, avec quelques ingrédients supplémentaires :

$$\frac{s-1}{2}\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \exp(A+Bs)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

où A et B sont des constantes. Dans le membre de gauche, on trouve au lieu de $\zeta(s)$ la demi-équation fonctionnelle : celle-ci est multipliée par $(s-1)$, pour éliminer la singularité au point $s=1$.

Riemann a certes pu obtenir cette formule, mais pas la prouver. C'est seulement en 1893 que le mathématicien français Jacques Hadamard y parvint, et ses résultats généraux sur ce sujet constituent maintenant une partie importante de l'analyse complexe.

Riemann disposait ainsi de deux représentations différentes de la même fonction par un produit : le produit eulérien et la formule ci-dessus. En les comparant, il obtint une formule explicite pour la fonction des nombres premiers $\pi(x)$ (voir l'encadré page ci-contre). Mais cette formule aussi dut attendre des décennies avant d'être démontrée, par von Mangoldt en 1895.

Les idées et les conjectures de Riemann stimulèrent les recherches dans cette

direction et fécondèrent le domaine en plein essor de la théorie des fonctions complexes. Ces efforts furent enfin couronnés de succès avec la preuve en 1896 de la conjecture de Gauss, nommée aujourd'hui «théorème des nombres premiers», par Hadamard et Charles de La Vallée-Poussin, simultanément mais indépendamment.

Pour cette preuve, on doit s'assurer que la fonction *zêta* n'a pas de zéros dans une partie suffisamment grande de la bande critique. Helge von Koch démontra en 1900 la propriété suivante. Plaçons dans la bande critique une droite verticale qui coupe l'axe réel en une valeur α comprise entre $1/2$ et 1 . Si la fonction *zêta* n'a pas de zéros à droite de cette ligne, alors le terme correctif dans le théorème des nombres premiers est de l'ordre de grandeur de x^α et réciproquement (pour être exact : l'exposant dans le terme correctif n'est pas α , mais un nombre un peu supérieur, aussi peu que l'on veut).

Il s'ensuit en particulier que le terme d'erreur ne peut être inférieur en ordre de grandeur à $x^{1/2}$, puisque $\zeta(s)$ a des zéros sur la droite critique. Si la conjecture de Riemann est vraie, le terme d'erreur est minimal et il s'ensuit que les nombres premiers sont répartis aussi régulièrement que possible.

L'importance de l'hypothèse de Riemann pour les mathématiques peut difficilement être surestimée. Des centaines d'articles portent sur ses conséquences et des résultats significatifs ont été obtenus en la supposant vraie. Il existe ainsi des méthodes cryptographiques importantes en pratique dont la sécurité dépend de la validité de la conjecture de Riemann.

La plupart des mathématiciens pensent que l'hypothèse de Riemann est vraie, notamment pour des raisons esthétiques (l'idée d'un ordre dans l'ensemble des zéros de la fonction *zêta* est plaisante), ou parce que Riemann, génie en avance sur son temps, en était lui-même convaincu.

BIBLIOGRAPHIE

R. TAZZIOLI, *Riemann, le géomètre de la Nature*, Belin-Pour la Science, 2010.

M. BALAZARD, *Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann*, *Gazette des mathématiciens*, vol. 126, pp. 7-24, 2010.

P. BORWEIN, *The Riemann Hypothesis: A resource for the aficionado and virtuoso alike*, Springer, 2008.

LA FONCTION GAMMA

On définit d'abord pour tous les nombres complexes s de partie réelle positive la fonction $\Gamma(s)$ par l'intégrale :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1} \exp(-u) du$$

Des théorèmes classiques du calcul intégral donnent :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \exp(-u) du = 1$$

et, par intégration par parties, l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$ pour tout s de partie réelle positive. On obtient ainsi $\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2$ et, en général, $\Gamma(n+1) = n \times \Gamma(n) = n!$ pour tout entier positif n . L'équation fonctionnelle s'écrit aussi $\Gamma(s) = \Gamma(s+1)/s$. On peut en déduire une valeur de la fonction Gamma pour les nombres de partie réelle comprise entre -1 et 0 à partir des valeurs connues, et donc lui donner un sens. Pour le point $s=0$, on devrait diviser par 0 et donc la fonction Γ n'est pas définie en 0. Le procédé peut être étendu et l'on parvient à définir la fonction Γ pour tous les nombres complexes s à l'exception des entiers négatifs. En ces entiers, la fonction Γ a des singularités, elle prend une valeur infinie.

LE SALUT PAR LA PHYSIQUE ?

Une observation surprenante a donné un élan récent aux recherches. Des estimations statistiques sur de nombreux zéros non triviaux de la fonction *zêta* révèlent des motifs analogues à ceux des valeurs propres de matrices aléatoires qui sont étudiées en physique mathématique (les matrices sont des tableaux de nombres utilisés pour représenter des applications linéaires, et les «valeurs propres» sont des nombres qui les caractérisent).

Ces constatations rejoignent certaines idées de Hilbert et du mathématicien d'origine hongroise George Pólya, émises dans les années 1930. Des idées qui ont déjà porté beaucoup de fruits : le Norvégien Atle Selberg a ainsi trouvé vers 1950 des «formules de traces» qui présentent une