> le coefficient correspondant n'est pas nul) a exactement n zéros, ou «racines», complexes – c'est le théorème fondamental de l'algèbre. Et si 0 n'est pas lui-même une racine du polynôme, on peut écrire ce dernier sous la forme $a(1-s/s_1)(1-s/s_2)\ldots(1-s/s_n)$, où les s_i sont les racines et a une constante appropriée.

La fonction *zêta* n'est bien sûr pas un polynôme. Mais Riemann parvint à l'écrire elle aussi comme un produit de facteurs de la forme $(1-s/\rho)$, où ρ parcourt les zéros non triviaux, avec quelques ingrédients supplémentaires :

$$\frac{s-1}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \exp(A+Bs)\prod_{\rho}(1-\frac{s}{\rho})\epsilon$$

où A et B sont des constantes. Dans le membre de gauche, on trouve au lieu de $\zeta(s)$ la demi-équation fonctionnelle : celle-ci est multipliée par $(s-1)$, pour éliminer la singularité au point $s=1$.

Riemann a certes pu obtenir cette formule, mais pas la prouver. C'est seulement en 1893 que le mathématicien français Jacques Hadamard y parvint, et ses résultats généraux sur ce sujet constituent maintenant une partie importante de l'analyse complexe.

Riemann disposait ainsi de deux représentations différentes de la même fonction par un produit : le produit eulérien et la formule ci-dessus. En les comparant, il obtint une formule explicite pour la fonction des nombres premiers $\pi(x)$ (*voir l'encadré page ci-contre*). Mais cette formule aussi dut attendre des décennies avant d'être démontrée, par von Mangoldt en 1895.

Les idées et les conjectures de Riemann stimulèrent les recherches dans cette direction et fécondèrent le domaine en plein essor de la théorie des fonctions complexes. Ces efforts furent enfin couronnés de succès avec la preuve en 1896 de la conjecture de Gauss, nommée aujourd'hui «théorème des nombres premiers», par Hadamard et Charles de La Vallée-Poussin, simultanément mais indépendamment.

Pour cette preuve, on doit s'assurer que la fonction *zêta* n'a pas de zéros dans une partie suffisamment grande de la bande critique. Helge von Koch démontra en 1900 la propriété suivante. Plaçons dans la bande critique une droite verticale qui coupe l'axe réel en une valeur α comprise entre 1/2 et 1. Si la fonction *zêta* n'a pas de zéros à droite de cette ligne, alors le terme correctif dans le théorème des nombres premiers est de l'ordre de grandeur de x^{α} et réciproquement (pour être exact : l'exposant dans le terme correctif n'est pas α, mais un nombre un peu supérieur, aussi peu que l'on veut).

Il s'ensuit en particulier que le terme d'erreur ne peut être inférieur en ordre de grandeur à $x^{1/2}$, puisque $\zeta(s)$ a des zéros sur la droite critique. Si la conjecture de Riemann est vraie, le terme d'erreur est minimal et il s'ensuit que les nombres premiers sont répartis aussi régulièrement que possible.

L'importance de l'hypothèse de Riemann pour les mathématiques peut difficilement être surestimée. Des centaines d'articles portent sur ses conséquences et des résultats significatifs ont été obtenus en la supposant vraie. Il existe ainsi des méthodes cryptographiques importantes en pratique dont la sécurité dépend de la validité de la conjecture de Riemann.

La plupart des mathématiciens pensent que l'hypothèse de Riemann est vraie, notamment pour des raisons esthétiques (l'idée d'un ordre dans l'ensemble des zéros de la fonction *zêta* est plaisante), ou parce que Riemann, génie en avance sur son temps, en était lui-même convaincu.

LE SALUT PAR LA PHYSIQUE ?

Une observation surprenante a donné un élan récent aux recherches. Des estimations statistiques sur de nombreux zéros non triviaux de la fonction *zêta* révèlent des motifs analogues à ceux des valeurs propres de matrices aléatoires qui sont étudiées en physique mathématique (les matrices sont des tableaux de nombres utilisés pour représenter des applications linéaires, et les «valeurs propres» sont des nombres qui les caractérisent).

Ces constatations rejoignent certaines idées de Hilbert et du mathématicien d'origine hongroise George Pólya, émises dans les années 1930. Des idées qui ont déjà porté beaucoup de fruits : le Norvégien Atle Selberg a ainsi trouvé vers 1950 des «formules de traces» qui présentent une

BIBLIOGRAPHIE

R. TAZZIOLI, *Riemann, le géomètre de la Nature*, Belin-Pour la Science, 2010.

M. BALAZARD, Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann, *Gazette des mathématiciens*, vol. 126, pp. 7-24, 2010.

P. BORWEIN, *The Riemann Hypothesis: A ressource for the afficionado and virtuoso alike*, Springer, 2008.

LA FONCTION GAMMA

On définit d'abord pour tous les nombres complexes s de partie réelle positive la fonction $\Gamma(s)$ par l'intégrale :

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} u^{s-1}\exp(-u)d$$

Des théorèmes classiques du calcul intégral donnent :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} \exp(-u)du =$$

et, par intégration par parties, l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1)=s\,\Gamma(s)$ pour tout s de partie réelle positive. On obtient ainsi $\Gamma(2)=1\times\Gamma(1)=1$, $\Gamma(3)=2\times\Gamma(2)=2$ et, en général, $\Gamma(n+1)=n\times\Gamma(n)=n!$ pour tout entier positif n. L'équation fonctionnelle s'écrit aussi $\Gamma(s)=\Gamma(s+1)/s$. On peut en déduire une valeur de la fonction Gamma pour les nombres de partie réelle comprise entre –1 et 0 à partir des valeurs connues, et donc lui donner un sens. Pour le point $s=0$, on devrait diviser par 0 et donc la fonction Γ n'est pas définie en 0. Le procédé peut être étendu et l'on parvient à définir la fonction Γ pour tous les nombres complexes s à l'exception des entiers négatifs. En ces entiers, la fonction Γ a des singularités, elle prend une valeur infinie.

grande ressemblance avec la formule de Riemann pour la fonction $\pi(x)$ et qui permettent de prouver un analogue de la conjecture de Riemann pour une autre sorte de fonctions *zêta*. Mais en ce qui concerne l'hypothèse de Riemann elle-même, ce type de tentatives n'avait jusqu'à présent fourni aucun résultat.

Depuis 2000, sur la base d'une idée de Jon Keating et Nina Snaith, de l'université de Bristol, on utilise des matrices aléatoires pour modéliser la fonction *zêta* sur la droite critique. En se fondant sur l'analogie entre ces objets complètement différents, les mathématiciens formulent des conjectures qui, espère-t-on, fourniront d'autres pistes pour apporter une réponse définitive à la conjecture de Riemann.

Une autre tentative un peu plus facile à saisir fait appel à une étonnante propriété d'approximation de la fonction *zêta*. En 1975, le mathématicien russe Serguei Voronin prouva que la fonction *zêta* peut approcher aussi précisément qu'on le veut n'importe quelle fonction (suffisamment régulière) sur un petit domaine. C'est le célèbre théorème d'universalité de Voronin. Explicitons un peu ce résultat spectaculaire.

Soit une fonction $f(s)$ définie sur un petit disque K, situé n'importe où dans la moitié droite de la bande critique. Supposons que f n'ait aucun zéro dans K et qu'elle y soit analytique (développable en série de puissances entières). Alors pour tout $\epsilon > 0$, aussi petit soit-il, il existe un nombre réel $t > 0$ tel que la différence entre $\zeta(s+it)$ et $f(s)$ soit inférieure à ϵ en valeur absolue, et ce pour tout s de K. En d'autres termes, on peut trouver t tel que $\zeta(s+it)$ soit aussi proche que l'on veut de $f(s)$.

UNE PORTE VERS L'UNIVERSALITÉ

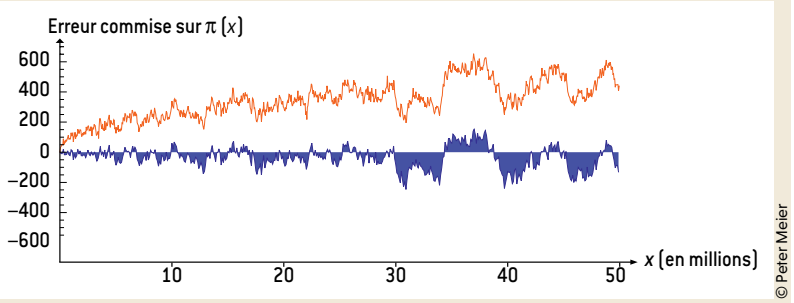
On montre même qu'il existe une infinité de nombres t vérifiant cette approximation pour une fonction f et un nombre ϵ donnés. En quelque sorte, la fonction *zêta* contient donc dans ses valeurs des informations sur toutes ces fonctions f. Un peu comme s'il s'agissait d'un atlas contenant toutes les cartes possibles… C'est pourquoi on résume le théorème d'universalité de Voronin en disant : « Qui connaît la fonction *zêta* connaît le monde. »

Cette propriété d'universalité fournit en retour des renseignements sur la fonction *zêta* elle-même. Si en effet la conjecture de Riemann est correcte, c'est-à-dire que tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite critique, on peut appliquer le théorème d'universalité à $\zeta(s)$ et il en résulte que la fonction *zêta* s'approxime elle-même – on en déduit qu'elle est autosimilaire, comme le sont les fractales (figures géométriques qui, quel que soit le grossissement choisi, gardent le même aspect). Réciproquement, si on prouvait que la fonction *zêta* est autosimilaire, la validité de la conjecture de Riemann en découlerait.

LA FORMULE DE RIEMANN POUR $\pi(x)$

$$\pi(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\,\pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho} \left(\mathrm{li}(x^{\rho}) + \mathrm{li}(x^{1-\rho})\right) + \int_{x}^{\infty} \frac{du}{u(u^2-1)\ln u} - \ln 2$$

Cette formule relative au nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs à x est valable pour tout $x \geqslant 2$ qui n'est pas une puissance d'un nombre premier p (dans ce cas particulier, on doit ajouter à gauche $1/(2k)$ pour la contribution de $x = p^k$). La somme dans le membre de droite est à effectuer sur tous les zéros ρ non triviaux de la fonction *zêta* ayant une partie imaginaire positive. La somme dans le membre de gauche est en réalité finie, car dès que la n-ième racine de x est inférieure à 2, le n-ième terme est nul (ainsi que les termes suivants).
Si l'on veut vraiment calculer $\pi(x)$ à l'aide de cette formule (avec un ordinateur), on doit remplacer les deux sommes par des sommes partielles ne contenant qu'un nombre fini de termes. Or même lorsqu'on ne prend en compte que les 10 premières valeurs de n et les 30 premiers zéros de la fonction *zêta*, on obtient une excellente approximation de $\pi(x)$ *(voir le graphique ci-dessous)*. L'écart entre cette approximation et la valeur exacte *(en bleu)* est à peine supérieur à 200, même autour de $x = 50$ millions. En revanche, l'approximation donnée par la formule de Gauss *(en rouge)* devient de plus en plus mauvaise à mesure que x augmente.



© Peter Meier

Le mathématicien danois Harald Bohr (frère du physicien Niels Bohr) est à l'origine de cette observation, dans les années 1920. Mais, faute du théorème d'universalité, il n'avait pu en donner une preuve. Celle-ci a été fournie par le mathématicien indien Bhaskar Bagchi au début des années 1980.

Beaucoup d'autres reformulations de la conjecture de Riemann sont aujourd'hui connues, mais une preuve semble pourtant toujours aussi éloignée. Bien sûr, si la conjecture était fausse, il suffirait de trouver un seul contre-exemple. Les mathématiciens cherchent aussi dans cette direction. Andrew Odlyzko, à l'université du Minnesota, Herman te Riele, au centre de recherche en informatique d'Amsterdam, et d'autres ont calculé jusqu'à présent plus de 100 milliards de zéros de la fonction *zêta* : ils se trouvent tous sur la droite critique $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Mais ces vérifications numériques ne constituent pas une preuve de l'hypothèse de Riemann. Face à l'infinité des nombres, ce à quoi le raisonnement humain et l'ordinateur peuvent accéder n'est qu'une minuscule goutte dans l'immensité de l'océan. Le million de dollars attend toujours son destinataire, mais cette somme ne représentera pas grand-chose comparée à la satisfaction d'avoir résolu le problème. ■