grande ressemblance avec la formule de Riemann pour la fonction $\pi(x)$ et qui permettent de prouver un analogue de la conjecture de Riemann pour une autre sorte de fonctions *zêta*. Mais en ce qui concerne l'hypothèse de Riemann elle-même, ce type de tentatives n'avait jusqu'à présent fourni aucun résultat.

Depuis 2000, sur la base d'une idée de Jon Keating et Nina Snaith, de l'université de Bristol, on utilise des matrices aléatoires pour modéliser la fonction *zêta* sur la droite critique. En se fondant sur l'analogie entre ces objets complètement différents, les mathématiciens formulent des conjectures qui, espère-t-on, fourniront d'autres pistes pour apporter une réponse définitive à la conjecture de Riemann.

Une autre tentative un peu plus facile à saisir fait appel à une étonnante propriété d'approximation de la fonction *zêta*. En 1975, le mathématicien russe Serguei Voronin prouva que la fonction *zêta* peut approcher aussi précisément qu'on le veut n'importe quelle fonction (suffisamment régulière) sur un petit domaine. C'est le célèbre théorème d'universalité de Voronin. Explicitons un peu ce résultat spectaculaire.

Soit une fonction $f(s)$ définie sur un petit disque K, situé n'importe où dans la moitié droite de la bande critique. Supposons que f n'ait aucun zéro dans K et qu'elle y soit analytique (développable en série de puissances entières). Alors pour tout $\epsilon>0$, aussi petit soit-il, il existe un nombre réel $t>0$ tel que la différence entre $\zeta(s+it)$ et $f(s)$ soit inférieure à ϵ en valeur absolue, et ce pour tout s de K. En d'autres termes, on peut trouver t tel que $\zeta(s+it)$ soit aussi proche que l'on veut de $f(s)$.

UNE PORTE VERS L'UNIVERSALITÉ

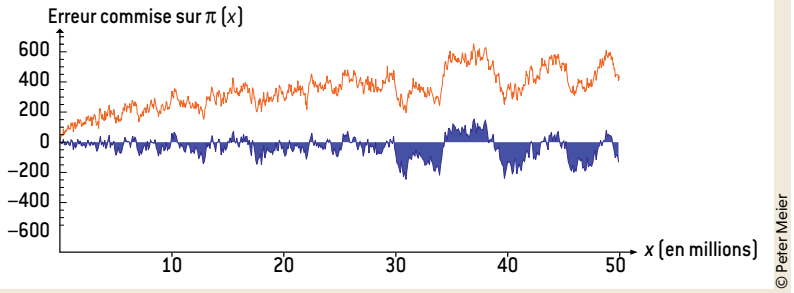
On montre même qu'il existe une infinité de nombres t vérifiant cette approximation pour une fonction f et un nombre ϵ donnés. En quelque sorte, la fonction *zêta* contient donc dans ses valeurs des informations sur toutes ces fonctions f. Un peu comme s'il s'agissait d'un atlas contenant toutes les cartes possibles… C'est pourquoi on résume le théorème d'universalité de Voronin en disant : « Qui connaît la fonction *zêta* connaît le monde. »

Cette propriété d'universalité fournit en retour des renseignements sur la fonction *zêta* elle-même. Si en effet la conjecture de Riemann est correcte, c'est-à-dire que tous les zéros non triviaux de $\zeta(s)$ se trouvent sur la droite critique, on peut appliquer le théorème d'universalité à $\zeta(s)$ et il en résulte que la fonction *zêta* s'approxime elle-même – on en déduit qu'elle est autosimilaire, comme le sont les fractales (figures géométriques qui, quel que soit le grossissement choisi, gardent le même aspect). Réciproquement, si on prouvait que la fonction *zêta* est autosimilaire, la validité de la conjecture de Riemann en découlerait.

LA FORMULE DE RIEMANN POUR $\pi(x)$

$$\pi(x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\,\pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho} \left(\mathrm{li}(x^{\rho}) + \mathrm{li}(x^{1-\rho})\right) + \int_{x}^{\infty} \frac{du}{u(u^2-1)\ln u} - \ln 2$$

Cette formule relative au nombre $\pi(x)$ de nombres premiers inférieurs à x est valable pour tout $x \geqslant 2$ qui n'est pas une puissance d'un nombre premier p (dans ce cas particulier, on doit ajouter à gauche $1/(2k)$ pour la contribution de $x=p^k$). La somme dans le membre de droite est à effectuer sur tous les zéros ρ non triviaux de la fonction *zêta* ayant une partie imaginaire positive. La somme dans le membre de gauche est en réalité finie, car dès que la n-ième racine de x est inférieure à 2, le n-ième terme est nul (ainsi que les termes suivants).
Si l'on veut vraiment calculer $\pi(x)$ à l'aide de cette formule (avec un ordinateur), on doit remplacer les deux sommes par des sommes partielles ne contenant qu'un nombre fini de termes. Or même lorsqu'on ne prend en compte que les 10 premières valeurs de n et les 30 premiers zéros de la fonction *zêta*, on obtient une excellente approximation de $\pi(x)$ *(voir le graphique ci-dessous)*. L'écart entre cette approximation et la valeur exacte *(en bleu)* est à peine supérieur à 200, même autour de $x=50$ millions. En revanche, l'approximation donnée par la formule de Gauss *(en rouge)* devient de plus en plus mauvaise à mesure que x augmente.



© Peter Meier

Le mathématicien danois Harald Bohr (frère du physicien Niels Bohr) est à l'origine de cette observation, dans les années 1920. Mais, faute du théorème d'universalité, il n'avait pu en donner une preuve. Celle-ci a été fournie par le mathématicien indien Bhaskar Bagchi au début des années 1980.

Beaucoup d'autres reformulations de la conjecture de Riemann sont aujourd'hui connues, mais une preuve semble pourtant toujours aussi éloignée. Bien sûr, si la conjecture était fausse, il suffirait de trouver un seul contre-exemple. Les mathématiciens cherchent aussi dans cette direction. Andrew Odlyzko, à l'université du Minnesota, Herman te Riele, au centre de recherche en informatique d'Amsterdam, et d'autres ont calculé jusqu'à présent plus de 100 milliards de zéros de la fonction *zêta* : ils se trouvent tous sur la droite critique $\mathrm{Re}(s)=1/2$.

Mais ces vérifications numériques ne constituent pas une preuve de l'hypothèse de Riemann. Face à l'infinité des nombres, ce à quoi le raisonnement humain et l'ordinateur peuvent accéder n'est qu'une minuscule goutte dans l'immensité de l'océan. Le million de dollars attend toujours son destinataire, mais cette somme ne représentera pas grand-chose comparée à la satisfaction d'avoir résolu le problème. ■

L'ESSENTIEL

- Comment déterminer les nombres premiers ? Depuis l'Antiquité, plusieurs formules ont été proposées pour les calculer.
- Certaines sont élégantes, d'autres plus complexes, mais elles ont souvent pour défaut de ne donner que quelques nombres premiers.
- D'autres encore donnent une infinité (théorique) de nombres premiers, mais les valeurs qu'ils prennent croissent trop vite.
- On peut néanmoins s'en inspirer pour faire mieux, notamment en ajustant très finement les paramètres des formules.

L'AUTEUR

SIMON PLOUFFE
professeur à l'IUT Informatique de Nantes, coauteur de l'Encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers (OEIS).

Un record pour les nombres premiers

Depuis des millénaires, les mathématiciens conçoivent des formules pour calculer des nombres premiers. En janvier 2019, une formule élaborée par l'auteur a généré une séquence de 100 nombres premiers. C'est un record ! Explications.

Le 7 décembre 2018, un record été battu, celui du plus grand nombre premier connu. $2^{82\,589\,933} - 1$, qui comporte près de 25 millions de chiffres en écriture décimale. On doit cette performance (la vérification est en cours) au *Gimps*, le *Great Internet Mersenne Prime Search*. Ce projet fondé par George Woltman réunit des volontaires mettant à disposition leur ordinateur pour un calcul, distribué, des nombres premiers dits de Mersenne (*voir l'encadré page 79*), c'est-à-dire de la forme $2^p - 1$, p étant un nombre premier. On disposerait donc d'une formule pour déterminer les nombres premiers ?

UNE FORMULE, MAIS LAQUELLE ?

Ce n'est pas aussi simple, notamment parce que tous les nombres premiers ne sont pas de la forme de Mersenne, tant s'en faut. La question se pose donc toujours : y a-t-il une formule pour les nombres premiers ? La réponse est… oui et non.

Et d'abord qu'entend-on par formule ? Par exemple, ce peut être une formule dite close comme celle trouvée par le Suisse Leonhard Euler en 1772 : $p(n) = n^2 + n + 41$. Pour n entre 0 >