2
3
5
11
37
223
3 331
192 271
84 308 429
774 116 799 347
681 098 209 317 971 743
562 101 323 304 225 290 104 514 179
13 326 678 220 145 859 782 825 116 625 722 145 759 009
1 538 448 162 271 607 869 601 834 587 431 948 506 238 982 765 193 425 993 274 489

Avec un exposant égal à 3/2 et a_0=2,038239154782... on obtient la suite de nombres premiers ci-dessus.

C'est désormais la suite A323611. Un autre exemple livre les petits nombres premiers. Avec a_0=3,34683553593243081... et un exposant égal à 1,251295195638... la suite (A323065) est: 3, 5, 7, 11, 19, 41, 103, 331, 1423, 8819, 86477, 1504949...

En choisissant a_0 assez grand, on peut utiliser un exposant très petit, comme 101/100. Si a_0=10^{500}+961,4993763378507... on obtient une suite de 100 nombres premiers, le dernier n'ayant que 1340 chiffres. Elle bat ainsi les records de 2010 (58 nombres premiers avec un polynôme et 26 avec une progression arithmétique). Notons néanmoins que lorsque leur taille dépasse 20 chiffres, les nombres obtenus que sont que des premiers probables. Si a_0 est bien choisi, on conjecture que l'exposant peut être aussi près de 1 qu'on le souhaite (pour limiter la croissance).

OBTENIR TOUS LES NOMBRES PREMIERS ?

Avec des formules de ce type, peut-on obtenir tous les nombres premiers? Pour y parvenir, on pourrait par exemple partir d'un nombre premier arbitraire et descendre jusqu'à 2. C'est possible avec un procédé inverse en utilisant 1/α, α étant l'exposant. Ainsi, en partant du nombre premier 10^{100}+267 et avec α =0,38562256415290... on obtient 742123524365563, 542489, 163, 7, 2.

On retrouve la suite inverse en partant à 2 avec a_0=2,1322219996628413452... et l'exposant 1/α=2,5932092490404286167308... Le principe fonctionne dans les deux sens!

Tous ces calculs décrits sont empiriques. En pratique, on arrive à générer un nombre arbitraire de nombres premiers avec une croissance minimale de la suite. Les formules sont bien plus économes que celles Mills et Wright. À partir d'un nombre premier donné, on peut descendre jusqu'à 2 et à partir de 2 on peut obtenir une famille de suites infinies de nombres premiers.

Les records sont faits pour être battus, et avec un matériel informatique adéquat, et un certain temps de calcul, la suite de 100 nombres premiers peut être étendue jusqu'à 1000000 de chiffres. Mieux, lorsque l'exposant est 3/2, on conjecture que tous les nombres premiers peuvent être générés. Reste à le démontrer... ■

UN PROGRAMME MAISON

L'algorithme mis au point procède en trois étapes. D'abord, on choisit la valeur de départ a_0 et l'exposant α, préférablement une fraction simple. Puis on lance un algorithme qui associe la technique de Monte-Carlo (fondée sur des processus aléatoires) et le principe du recuit simulé. Ce principe est inspiré de la métallurgie où l'on alterne les cycles de refroidissement lent et de réchauffage (recuit) afin de minimiser l'énergie d'un matériau. Cette technique évite que l'écart entre chaque nombre premier ne croisse trop vite. Une fois quatre ou cinq valeurs trouvées, on passe à l'étape 3. On utilise une formule qui permet d'aller soit vers l'avant soit vers l'arrière. Vers l'avant, on cherche le plus petit nombre premier après $\{a_p^{\alpha}\}$. C'est assez facile en quelques minutes, même s'il a des milliers de chiffres, grâce à des logiciels, comme Maple ou PFGW. On rebrousse chemin pour vérifier que la formule fonctionne. Pour ce faire, on doit résoudre pour x avec x^{α} - S_{n+1}. Ici S_{n+1} est le prochain nombre premier candidat. C'est ici qu'un α rationnel facilite le calcul.

Des nombres et des énigmes

La suite des énigmes concoctées par Ana Retchman et Sébastien Kernivinen.

La fin page 105. Solutions page 106.


Ana Retchman


Sébastien Kernivinen

ÉNIGME 5

Trouver tous les entiers strictement positifs x et y tels que $6 \times (x! + 3) = y^2 + 5$ (ou $x!$ désigne le produit $1 \times 2 \times 3 \ldots \times x$).

ÉNIGME 6

Trouvez les chiffres *a* et *b* de sorte que le nombre à cinq chiffres 32*a*1*b*, soit divisible par 156.

ÉNIGME 7

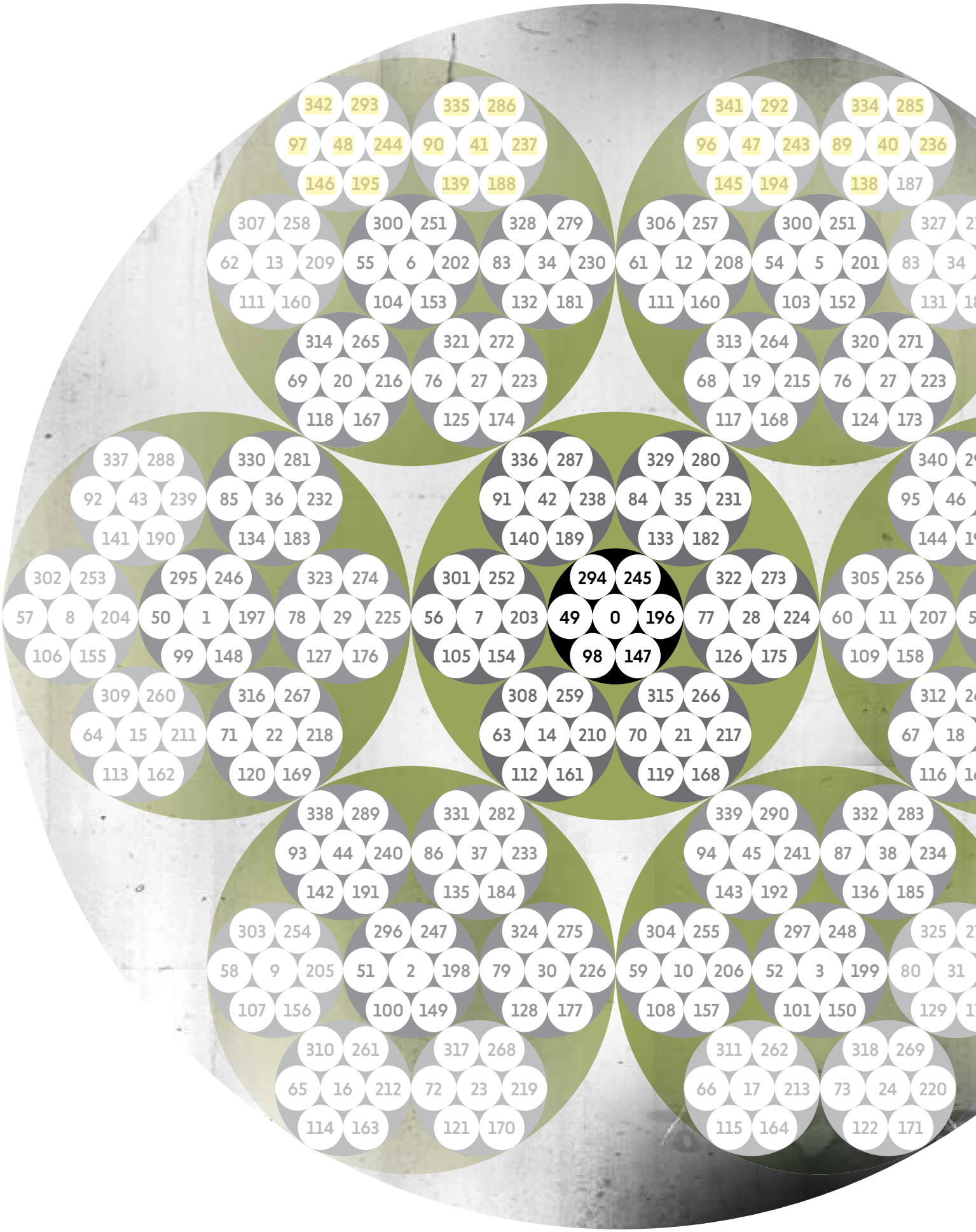
Quel est le plus grand nombre qu'on puisse obtenir en multipliant des nombres entiers positifs dont la somme vaut 8 ?

ÉNIGME 8

Si douze nombres strictement positifs $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_{12}$ sont tels que, dès qu'on en choisit trois quelconques parmi eux, on ne peut pas construire de triangle (non plat) dont les côtés aient pour longueurs ces trois nombres, quelle est la plus petite valeur possible de $\frac{a_{12}}{a_1}$?

ÉNIGME 9

La somme de deux nombres entiers positifs vaut 125. Si on multiplie le premier par 4 et qu'on divise le second par 4, on obtient la même somme. Quels sont les deux nombres initiaux ?


342 293 335 286
97 48 244 90 41 237
146 195 139 188
341 292 334 285
96 47 243 89 40 236
145 194 138 187
307 258 300 251 328 279
62 13 209 55 6 202 83 34 230
111 160 104 153 132 181
306 257 300 251
61 12 208 54 5 201
111 160 103 152
314 265 321 272
69 20 216 76 27 223
118 167 125 174
313 264 320 271
68 19 215 76 27 223
117 168 124 173
337 288 330 281
92 43 239 85 36 232
141 190 134 183
336 287 329 280
91 42 238 84 35 231
140 189 133 182
340
95 46
144
302 253 295 246 323 274
57 8 204 50 1 197 78 29 225
106 155 99 148 127 176
301 252 294 245 322 273
56 7 203 49 0 196 77 28 224
105 154 98 147 126 175
305 256
60 11 207
109 158
309 260 316 267
64 15 211 71 22 218
113 162 120 169
308 259 315 266
63 14 210 70 21 217
112 161 119 168
312
67 18
116
338 289 331 282
93 44 240 86 37 233
142 191 135 184
339 290 332 283
94 45 241 87 38 234
143 192 136 185
303 254 296 247 324 275
58 9 205 51 2 198 79 30 226
107 156 100 149 128 177
304 255 297 248
59 10 206 52 3 199
108 157 101 150
310 261 317 268
65 16 212 72 23 219
114 163 121 170
311 262 318 269
66 17 213 73 24 220
115 164 122 171