

comprend que l'on peut traiter de géométrie à partir des coordonnées (des nombres donc) et qu'à l'inverse, on peut étudier des courbes (de la géométrie) à partir de leurs équations. La géométrie devient en quelque sorte la même chose que l'algèbre!

Un deuxième grand moment, inverse, a eu lieu dans la deuxième moitié du xx^e siècle. Au lieu d'expliquer la géométrie par l'algèbre, au lieu de décrire un cercle par son équation $x^2 + y^2 = 1$ (c'est l'approche cartésienne), Alexandre Grothendieck, et bien d'autres, ont expliqué les nombres par la géométrie. Les nombres entiers forment des espaces sur lesquels on peut faire de la géométrie! Sans cette vision géométrique de l'arithmétique, par exemple, on ne serait jamais arrivé à démontrer le théorème de Fermat.

En construisant sans cesse ces passerelles, ne va-t-on pas aboutir à une sorte d'unité globale?

Étienne Ghys: J'aime les mathématiques sans aucun doute à cause de cette unité. Les mathématiques explosent en quantité, les connaissances augmentent de façon exponentielle (ce que l'on sait aujourd'hui est sans commune mesure avec ce que l'on connaissait il y a seulement cent ans), mais elles conservent une cohérence indiscutable. Les mathématiques ont réussi à croître non pas comme un arbre, mais plutôt comme une nébuleuse connexe: il y a des passerelles dans tous les sens, je trouve ça vraiment remarquable. La structure des mathématiques évoque un graphe expenseur, un sujet mathématique aujourd'hui très à la mode.

De quoi s'agit-il?

Étienne Ghys: Lors du dernier congrès international de mathématiques, plusieurs conférences plénières en parlaient. Imaginons un graphe en forme d'arbre. En retirant un sommet à l'intérieur, on obtient deux morceaux, deux graphes plus petits. Les graphes expenseurs sont à l'opposé: on a du mal à les couper en deux morceaux de taille significative. On a beau retirer des sommets, le graphe reste d'un seul tenant. Les graphes expenseurs ont une propriété d'hyperconnectivité. Internet, un graphe d'environ 10 milliards de sommets, est un exemple. Le nombre de pages Internet qu'il faudrait fermer pour couper le monde en deux parties de grande taille qui ne communiqueraient plus est très grand.

Le mathématicien russe Gregori Margulis, aujourd'hui à l'université Yale, aux États-Unis, en a construit

dans les années 1980. C'est un sujet vraiment intéressant et qui, en passant, est relié à l'arithmétique.

De quelle façon?

Étienne Ghys: Au début, dans les années 1970, on avait démontré l'existence de tels graphes par des moyens probabilistes, mais on n'en connaissait aucun que l'on pouvait décrire de façon explicite. Finalement, Gregori Margulis y est parvenu en utilisant les nombres premiers et des graphes dits de Cayley (qui encodent la structure d'un groupe). En d'autres termes, aujourd'hui on peut construire explicitement de grands graphes expenseurs grâce aux nombres premiers.

Gregori Margulis est un grand mathématicien. Médaille Fields en 1978, il n'a pas pu venir chercher sa récompense à Helsinki, parce que l'Union soviétique ne l'a pas autorisé à sortir de son pays. Il a donc envoyé sa conférence par la poste et c'est Jacques Tits, Prix Abel en 2008, qui l'a lue. Elle annonçait la démonstration du théorème d'arithméticité, un résultat absolument extraordinaire. Il continue à travailler aujourd'hui, sur de nombreux sujets.

Est-ce que les nombres ont leur place dans votre spécialité, la géométrie et les systèmes dynamiques?

Étienne Ghys: Et comment! C'est justement un de ces nombreux exemples de connexion entre des domaines qu'on pensait indépendants. Dans ce cas précis, les systèmes dynamiques ont remis de l'ordre dans les nombres.

Il s'agit d'une question d'approximation diophantienne. L'idée est d'approcher un nombre irrationnel et de s'intéresser à la qualité de l'approximation. Par exemple, je peux approcher le nombre π par $22/7$, mais aussi par $355/113$. Quel est le lien entre l'erreur commise et la taille du numérateur et du dénominateur du nombre rationnel? Cette question est un sujet majeur.

Les mathématiques explosent en quantité, le savoir augmente de façon exponentielle

Certains nombres, dits de Liouville, sont très bien approchés par des nombres rationnels. Pourquoi? Par exemple, construisons le nombre suivant: un «0», une virgule, un «1», 10 000 «0», un «1», un million de «0», un «1», un milliard de «0», un «1», un milliard de milliards de milliards de milliards de «0», encore un «1»... Dans son écriture décimale, ce nombre est essentiellement constitué de «0», avec de temps en temps, et de plus en plus rarement un «1». Il est bien sûr irrationnel, car les décimales ne sont pas périodiques, mais il est extrêmement bien approché par un nombre rationnel puisque si je m'arrête par exemple au dix millièmes «1», les «0» qui suivent sont tellement nombreux que l'erreur commise en le tronquant à ce niveau est microscopique. Ce nombre est *presque* rationnel. Or un très ancien théorème de Liouville, de la fin xix^e siècle, affirme qu'un tel nombre est nécessairement transcendant. C'était la première fois que l'on mettait en évidence cette propriété!

Elle signifie que le nombre en question ne peut pas être solution d'une équation à coefficients entiers. C'est le cas de π , de e ... Mais à cette époque, on l'ignorait.

Maintenant, à l'opposé, on trouve... le nombre d'or. Le nombre d'or est irrationnel, Platon le savait, Euclide en parle... Et il est très mal approché par des rationnels. On parle alors de nombres diophantiens.

Un autre théorème du début du xx^e siècle va nous conduire à la dynamique. Il stipule que le nombre d'or (ainsi que quelques autres qui lui sont très reliés) est le pire de ces nombres diophantiens: aucun autre nombre n'est aussi loin des rationnels. L'image est saisissante!

À cette aune, quel nombre suit le nombre d'or? C'est le nombre d'argent, qui correspond à $\sqrt{2}$. Il est très mal approché par les nombres rationnels, mais l'est un peu mieux que le nombre d'or. Viennent

ensuite le nombre de bronze, et d'autres encore. Ils forment ensemble la suite de Markov et convergent vers une limite. Ils constituent tout un domaine d'étude, qu'on appelle le spectre de Markov et de Lagrange.

J'en viens au rapport avec la dynamique. Les tout derniers théorèmes qui décrivent la nature de ces nombres mal approchés par des rationnels sont le fait de l'école brésilienne. Leurs énoncés parlent de nombres, mais dès la première ligne de démonstration, on parle de systèmes dynamiques, d'orbites qui convergent, ou pas... Ce courant a été initié pour l'essentiel par Gregori Margulis, encore lui, dans les années 1980. Marina Ratner, décédée il y a peu, a également joué un rôle important.

Ce lien entre différents domaines, et tous les autres, que disent-ils de la nature des mathématiques ?

Étienne Ghys : Difficile de répondre... Ces multiples connexions disent peut-être que les mathématiques sont importantes. Elles refusent d'être coupées en morceaux, alors que depuis trois mille ans, beaucoup ont cherché à le faire.

La distinction fréquente entre les mathématiques pures et appliquées en est une bonne illustration. À certaines périodes de l'histoire, cette différence ne faisait aucun sens. Carl Friedrich Gauss par exemple, était-il théoricien ou non ? Astronome ou mathématicien ? Impossible de trancher. Le génie des *Disquisitiones Arithmeticae* (un texte fondamental de théorie des nombres), l'inventeur du théorème de représentation conforme et l'arpenteur du royaume de Hanovre sont un seul et même Gauss. Dans son esprit, il n'y a ni mathématiques pures ni appliquées.

À d'autres moments, la situation change. Ainsi, je pense qu'Henri Poincaré faisait une différence entre les deux, même s'il s'est illustré dans les deux registres. Ensuite, une bonne partie des mathématiques françaises du xx^e siècle ont séparé le pur et l'appliqué, ce qui a d'ailleurs eu un certain nombre d'avantages pendant un temps.

Du point de vue de la politique scientifique, le CNRS a un temps envisagé de scinder en deux la section de mathématiques. Cela ne s'est heureusement pas fait, et aujourd'hui, plus personne n'y pense. Mais on peut encore repérer quelques réminiscences de ce débat. Ce modèle s'applique même à la science tout entière, où l'on essaie d'opposer la recherche fondamentale et la recherche appliquée.

Si les mathématiques se dispersaient dans tous les sens et perdaient leur cohésion, alors on en déduirait que l'objet central situé derrière n'existe pas. J'ai plutôt le sentiment que la cohérence, confirmée depuis des siècles, prouve que l'on parle de quelque chose d'unique, que l'on appelle « mathématique ».

En tant qu'adepte de la diffusion, le nombre a-t-il un statut particulier lorsqu'il s'agit de partager les mathématiques avec le grand public ?

Étienne Ghys : Première remarque, nous manipulons des nombres tous les jours, à peu près correctement. Ensuite, tout le monde croit savoir ce qu'est un nombre (pourant, rien n'est moins sûr), mais presque personne ne s'est jamais vraiment posé la question. Pour ces raisons, les nombres ont en effet un rôle important dans la diffusion des sciences et des mathématiques en particulier : ce sont des objets à la fois familiers et méconnus.

Par exemple, sur le site *Images des mathématiques*, que j'ai contribué à créer en 2009, l'article le plus lu, et de très loin, est consacré aux... tables de multiplication ! Ça fait réfléchir. Pourquoi celui-là ? En regardant de plus près la fréquentation, on observe un pic à chaque rentrée scolaire. C'est passionnant. Les parents se posent des questions pour leurs enfants. Il y a une demande dans nos rapports aux nombres.

d'un grand nombre de mathématiciens pendant plusieurs siècles. Je crois qu'il faudrait commencer par dire ça aux enfants : ils sont les héritiers d'un passé très riche.

Jusqu'au Moyen Âge, les additions étaient faisables, mais les multiplications restaient très compliquées, même avec le système décimal. Dans une lettre, un riche marchand allemand demande conseil à un universitaire pour orienter son fils. L'universitaire répond que s'il s'agit pour son fils de ne faire que des additions, alors une université allemande devrait suffire. Mais s'il faut multiplier, le fils doit partir étudier en Italie. Des techniques se développaient donc, progressivement.

Pour résumer, le nombre est essentiel pour la diffusion car les gens sont intéressés. Les enfants adorent qu'on leur explique comment multiplier facilement avec les doigts. Et l'on peut s'adapter à tous les auditoires. Pour un public plus averti, on peut par exemple aborder la cryptographie, les nombres premiers... Le nombre sert en toute occasion !

Parmi les grands problèmes qui restent à résoudre en théorie des nombres, lesquels vous semblent être une sorte de graal ?

Étienne Ghys : Je ne vais pas être très original, mais il y a bien sûr l'hypothèse de Riemann sur les nombres premiers qui reste centrale depuis très longtemps.

Tout le monde croit savoir ce qu'est un nombre, mais qui s'est vraiment posé la question ?

Dans cet article, j'explique des choses très simples, comme les méthodes employées à l'école primaire pour les additions et les multiplications. Et je commence par une question : « Comment les Romains pouvaient-ils multiplier CXXIV par XXIX ? » C'est impossible.

À l'école, un enfant apprend des algorithmes, pas très compliqués, pour faire des opérations. Il bénéficie des progrès conceptuels gigantesques dus au travail

Intrinsèquement, pour quelles raisons est-elle si importante ?

Étienne Ghys : Parce que les nombres premiers sont les briques élémentaires de l'arithmétique, c'est-à-dire, on l'a dit, de la moitié des mathématiques. La distribution asymptotique des nombres premiers parmi les nombres entiers, c'est vraiment la base. Tous les nombres entiers sont fabriqués à partir de ces nombres premiers. On comprend alors