

L'ESSENTIEL

● Peter Scholze, mathématicien allemand d'à peine 30 ans, a reçu la médaille Fields en 2018.

● Il a été récompensé notamment pour

les espaces perfectoïdes, des objets mathématiques construits à partir des nombres p -adiques, une extension abstraite des nombres naturels arithmétiques.

● Ces espaces permettent de transposer des problèmes complexes dans des domaines où l'arithmétique est bien plus simple.

L'AUTEURE



ERICA KLARREICH docteure en mathématiques de l'université Stony Brook, dans l'État de New York, elle contribue régulièrement au magazine *Quanta*.

L'oracle de l'arithmétique

Peter Scholze fut l'un des quatre lauréats de la médaille Fields en 2018, la plus prestigieuse récompense en mathématiques. Avec le concept de perfectoïde, il a mis au jour des liens profonds entre la théorie des nombres et la géométrie.

avait réussi à contourner l'une des parties les plus compliquées de la démonstration, celle ayant trait à une connexion générale entre la théorie des nombres et la géométrie.

UNE LEÇON D'HUMILITÉ

«C'était incroyable qu'un résultat aussi révolutionnaire vienne de quelqu'un d'aussi jeune, s'enflamme Jared Weinstein, théoricien des nombres à l'université de Boston, âgé de 38 ans. Ce fut une sacrée leçon d'humilité!»

À l'université de Bonn, qui proposa à Peter Scholze un poste de professeur à peine deux ans plus tard, les mathématiciens avaient déjà perçu ses extraordinaires capacités. Après son article sur les travaux de Harris et Taylor, c'est l'ensemble des experts en théorie des nombres et en géométrie qui en fut convaincu.

Depuis, Peter Scholze s'est fait un nom dans la communauté des mathématiciens tout entière. Certains disent déjà de lui qu'il est «un des mathématiciens les plus influents du monde» et «un talent rare qui n'émerge que toutes les quelques décennies». De fait, il a reçu en août 2018 la médaille Fields, la plus prestigieuse récompense en mathématiques, décernée tous les quatre ans lors du Congrès international des mathématiciens.

L'innovation majeure de Peter Scholze – une classe de structures fractales qu'il appelle les espaces perfectoïdes – n'a que quelques années d'existence, mais elle a déjà de vastes ramifications en géométrie arithmétique, un domaine où la théorie des nombres et la géométrie se rejoignent. «Dans ses travaux, Peter Scholze fait preuve de "prescience", admire Jared Weinstein: il peut voir les développements avant même qu'ils ne se produisent.»

E

n 2010, une rumeur étonnante circule au sein de la communauté des théoriciens des nombres. Un étudiant de l'université de Bonn, en Allemagne, aurait publié un article qui redémontrait une conjecture impénétrable en théorie des nombres en seulement 37 pages, là où les deux mathématiciens Michael Harris et Richard Taylor avaient eu besoin de 288 pages. À 22 ans, Peter Scholze, l'étudiant en question,



Cet article a d'abord été publié en anglais par *Quanta Magazine*, une publication en ligne indépendante soutenue par la *Simons Foundation* afin de favoriser la diffusion des sciences : <http://bit.ly/QM-Scholze>

Face aux découvertes de Peter Scholze, beaucoup de mathématiciens réagissent avec «un mélange d'admiration, de peur et d'euphorie», explique Bhargav Bhatt, de l'université du Michigan. Sa personnalité n'est pas en cause, car il est unanimement reconnu comme quelqu'un de généreux. «Il ne vous prend jamais de haut», confie Eugen Hellmann, à l'université de Bonn.

Le plus déconcertant est sa vision en profondeur de la nature des phénomènes mathématiques. Contrairement à la plupart de ses confrères, il commence rarement à réfléchir à un problème particulier. Il privilégie plutôt des concepts insaisissables qu'il veut comprendre pour ce qu'ils sont. «Mais ensuite, raconte Ana Caraiani, à l'université de Princeton, les structures qu'il crée s'avèrent avoir des applications dans une multitude de directions qui n'avaient pas été anticipées, simplement parce qu'elles étaient le bon objet auquel il fallait réfléchir.»

APPRENDRE L'ARITHMÉTIQUE

Peter Scholze a commencé à apprendre seul les mathématiques de niveau universitaire à l'âge de 14 ans, alors qu'il était au lycée Heinrich-Hertz, à Berlin. Dans cet établissement, «vous n'étiez pas vu comme un marginal si vous vous intéressiez aux mathématiques», confie-t-il.

BIBLIOGRAPHIE

P. SCHOLZE, Perfectoid spaces, *Publications mathématiques de l'IHÉS*, vol. 116, pp. 245-313, 2012.

J.-M. FONTAINE, Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze), «Séminaire Bourbaki, 64^e année 2011/2012», exposés 1043-1058, vol. 352, *Société mathématique de France*, 2013.

B. BHATT, What is a perfectoid space ?, *Notices AMS*, vol. 61(9), octobre 2014.

À 16 ans, il apprend que dix ans plus tôt, en 1995, Andrew Wiles avait prouvé le fameux dernier théorème de Fermat, selon lequel l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution entière non nulle si n est supérieur à 2 (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68). Peter Scholze se rue sur la preuve, sauf qu'elle fait appel aux mathématiques les plus compliquées. «Je n'y comprenais rien, mais c'était fascinant», dit-il.

Alors il fait marche arrière, essayant de déterminer ce qu'il devait apprendre pour comprendre la preuve de Wiles. «C'est plus ou moins comme ça que j'ai appris jusqu'ici», détaille-t-il. «En fait, je n'ai jamais vraiment appris les choses basiques comme l'algèbre linéaire. Je les ai seulement assimilées en m'intéressant à d'autres notions.»

À mesure qu'il étudiait la preuve de Wiles, Peter Scholze se passionna pour les objets mathématiques utilisés – les formes modulaires et les courbes elliptiques, qui réunissent des domaines disparates de la théorie des nombres, de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse. Comprendre les objets mathématiques en jeu était plus intéressant que le problème lui-même.

Aujourd'hui encore, Peter Scholze travaille sur des problèmes ancrés dans des équations simples impliquant des nombres entiers. De là, même les structures mathématiques les plus ésotériques qui en découlent restent concrètes à ses yeux. «Je m'intéresse surtout à l'arithmétique», explique-t-il. Il se dit très heureux lorsque ses constructions abstraites le conduisent à de petites découvertes sur les nombres entiers.

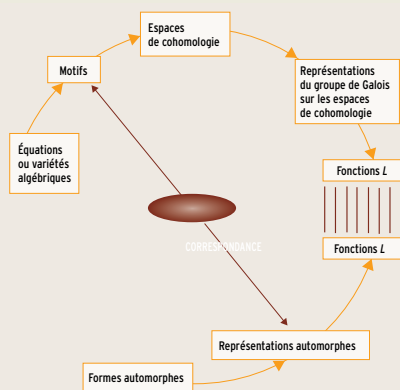
À l'université, Peter Scholze persévère dans la théorie des nombres et la géométrie. Là, son camarade de classe, Eugen Hellmann, se souvient que pendant les cours de mathématiques, Peter ne prenait jamais de notes. Il comprenait le contenu du cours en temps réel. «Mais pas seulement en surface; il comprenait en profondeur, si bien qu'il n'oubliait rien.»

Peter Scholze a commencé ses recherches en géométrie arithmétique, où des outils de géométrie aident à approcher les solutions entières d'équations polynomiales (par exemple, $xy^2 + 3y = 5$), qui n'impliquent que des nombres entiers, des variables et des exposants.

Pour certaines équations de ce type, il est utile de déterminer si elles ont des solutions dans des ensembles de nombres alternatifs dits p -adiques qui, comme les réels, sont construits en «remplissant les intervalles» entre les entiers et les fractions (voir *l'encadré page 88*). Mais ces corps de nombres sont fondés sur des notions non standard d'intervalles et de proximité. Dans un système p -adique, deux nombres sont proches, non pas si leur différence est petite, mais si elle est divisible de nombreuses fois par p (p étant un nombre premier). C'est étrange, mais utile! Ainsi, les nombres 3-adiques offrent un moyen naturel d'étudier

LE PROGRAMME DE LANGLANDS

Une part substantielle des recherches menées ces dernières décennies en théorie des nombres et en géométrie algébrique s'est déroulée sous l'impulsion d'un tissu de conjectures, dont Robert Langlands, de l'Institut des études avancées, à Princeton, aux États-Unis, avait formulé certaines dans une longue lettre adressée à André Weil en 1967. Cet ensemble de conjectures, les unes précises, les autres un peu floues, est surnommé aujourd'hui «programme (ou correspondance) de Langlands». Il dresse des ponts entre la théorie des nombres et d'autres parties des mathématiques, notamment la théorie des représentations des groupes et la théorie de certaines fonctions nommées formes automorphes. Il a été fructueux, dans la mesure où plusieurs résultats importants ont été démontrés au fil des ans: la démonstration du théorème de Fermat, en 1994, en est l'un de ces résultats les plus marquants. Pour autant, l'exploration et la démonstration de cette «correspondance» sont loin d'être achevées: elles représentent toujours, pour les mathématiciens, un défi à relever.



Le programme de Langlands relie deux grands édifices, l'un construit à partir des équations ou variétés algébriques, l'autre à partir de fonctions modulaires ou automorphes. Il conjecture une correspondance entre motifs et représentations automorphes, deux ensembles d'objets auxquels on sait associer des «fonctions L», fonctions qui contiennent des informations de nature arithmétique.