

> Face aux découvertes de Peter Scholze, beaucoup de mathématiciens réagissent avec «un mélange d'admiration, de peur et d'euphorie», explique Bhargav Bhatt, de l'université du Michigan. Sa personnalité n'est pas en cause, car il est unanimement reconnu comme quelqu'un de généreux. «Il ne vous prend jamais de haut», confie Eugen Hellmann, à l'université de Bonn.

Le plus déconcertant est sa vision en profondeur de la nature des phénomènes mathématiques. Contrairement à la plupart de ses confrères, il commence rarement à réfléchir à un problème particulier. Il privilégie plutôt des concepts insaisissables qu'il veut comprendre pour ce qu'ils sont. «Mais ensuite, raconte Ana Caraiani, à l'université de Princeton, les structures qu'il crée s'avèrent avoir des applications dans une multitude de directions qui n'avaient pas été anticipées, simplement parce qu'elles étaient le bon objet auquel il fallait réfléchir.»

APPRENDRE L'ARITHMÉTIQUE

Peter Scholze a commencé à apprendre seul les mathématiques de niveau universitaire à l'âge de 14 ans, alors qu'il était au lycée Heinrich-Hertz, à Berlin. Dans cet établissement, «vous n'étiez pas vu comme un marginal si vous vous intéressiez aux mathématiques», confie-t-il.

BIBLIOGRAPHIE

P. SCHOLZE, *Perfectoid spaces*, *Publications mathématiques de l'IHÉS*, vol. 116, pp. 245-313, 2012.

J.-M. FONTAINE, *Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze)*, «Séminaire Bourbaki, 64^e année 2011/2012», exposés 1043-1058, vol. 352, *Société mathématique de France*, 2013.

B. BHATT, *What is a perfectoid space ?*, *Notices AMS*, vol. 61(9), octobre 2014.

À 16 ans, il apprend que dix ans plus tôt, en 1995, Andrew Wiles avait prouvé le fameux dernier théorème de Fermat, selon lequel l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution entière non nulle si n est supérieur à 2 (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68). Peter Scholze se rue sur la preuve, sauf qu'elle fait appel aux mathématiques les plus compliquées. «Je n'y comprenais rien, mais c'était fascinant», dit-il.

Alors il fait marche arrière, essayant de déterminer ce qu'il devait apprendre pour comprendre la preuve de Wiles. «C'est plus ou moins comme ça que j'ai appris jusqu'ici», détaille-t-il. «En fait, je n'ai jamais vraiment appris les choses basiques comme l'algèbre linéaire. Je les ai seulement assimilées en m'intéressant à d'autres notions.»

À mesure qu'il étudiait la preuve de Wiles, Peter Scholze se passionna pour les objets mathématiques utilisés – les formes modulaires et les courbes elliptiques, qui réunissent des domaines disparates de la théorie des nombres, de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse. Comprendre les objets mathématiques en jeu était plus intéressant que le problème lui-même.

Aujourd'hui encore, Peter Scholze travaille sur des problèmes ancrés dans des équations simples impliquant des nombres entiers. De là, même les structures mathématiques les plus ésotériques qui en découlent restent concrètes à ses yeux. «Je m'intéresse surtout à l'arithmétique», explique-t-il. Il se dit très heureux lorsque ses constructions abstraites le conduisent à de petites découvertes sur les nombres entiers.

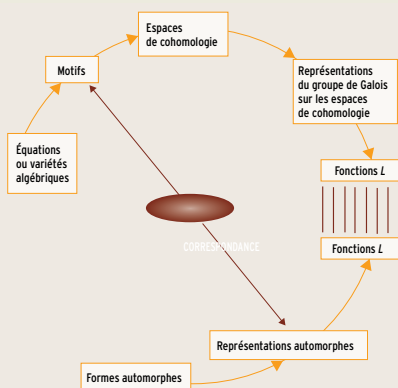
À l'université, Peter Scholze persévère dans la théorie des nombres et la géométrie. Là, son camarade de classe, Eugen Hellmann, se souvient que pendant les cours de mathématiques, Peter ne prenait jamais de notes. Il comprenait le contenu du cours en temps réel. «Mais pas seulement en surface; il comprenait en profondeur, si bien qu'il n'oubliait rien.»

Peter Scholze a commencé ses recherches en géométrie arithmétique, où des outils de géométrie aident à approcher les solutions entières d'équations polynomiales (par exemple, $xy^2 + 3y = 5$), qui n'impliquent que des nombres entiers, des variables et des exposants.

Pour certaines équations de ce type, il est utile de déterminer si elles ont des solutions dans des ensembles de nombres alternatifs dits p -adiques qui, comme les réels, sont construits en «remplissant les intervalles» entre les entiers et les fractions (voir *l'encadré page 88*). Mais ces corps de nombres sont fondés sur des notions non standard d'intervalles et de proximité. Dans un système p -adique, deux nombres sont proches, non pas si leur différence est petite, mais si elle est divisible de nombreuses fois par p (p étant un nombre premier). C'est étrange, mais utile! Ainsi, les nombres 3-adiques offrent un moyen naturel d'étudier

LE PROGRAMME DE LANGLANDS

Une part substantielle des recherches menées ces dernières décennies en théorie des nombres et en géométrie algébrique s'est déroulée sous l'impulsion d'un tissu de conjectures, dont Robert Langlands, de l'Institut des études avancées, à Princeton, aux États-Unis, avait formulé certaines dans une longue lettre adressée à André Weil en 1967. Cet ensemble de conjectures, les unes précises, les autres un peu floues, est surnommé aujourd'hui «programme (ou correspondance) de Langlands». Il dresse des ponts entre la théorie des nombres et d'autres parties des mathématiques, notamment la théorie des représentations des groupes et la théorie de certaines fonctions nommées formes automorphes. Il a été fructueux, dans la mesure où plusieurs résultats importants ont été démontrés au fil des ans: la démonstration du théorème de Fermat, en 1994, en est l'un de ces résultats les plus marquants. Pour autant, l'exploration et la démonstration de cette «correspondance» sont loin d'être achevées: elles représentent toujours, pour les mathématiciens, un défi à relever.



Le programme de Langlands relie deux grands édifices, l'un construit à partir des équations ou variétés algébriques, l'autre à partir de fonctions modulaires ou automorphes. Il conjecture une correspondance entre motifs et représentations automorphes, deux ensembles d'objets auxquels on sait associer des «fonctions L», fonctions qui contiennent des informations de nature arithmétique.