

> Face aux découvertes de Peter Scholze, beaucoup de mathématiciens réagissent avec «un mélange d'admiration, de peur et d'euphorie», explique Bhargav Bhatt, de l'université du Michigan. Sa personnalité n'est pas en cause, car il est unanimement reconnu comme quelqu'un de généreux. «Il ne vous prend jamais de haut», confie Eugen Hellmann, à l'université de Bonn.

Le plus déconcertant est sa vision en profondeur de la nature des phénomènes mathématiques. Contrairement à la plupart de ses confrères, il commence rarement à réfléchir à un problème particulier. Il privilégie plutôt des concepts insaisissables qu'il veut comprendre pour ce qu'ils sont. «Mais ensuite, raconte Ana Caraiani, à l'université de Princeton, les structures qu'il crée s'avèrent avoir des applications dans une multitude de directions qui n'avaient pas été anticipées, simplement parce qu'elles étaient le bon objet auquel il fallait réfléchir.»

APPRENDRE L'ARITHMÉTIQUE

Peter Scholze a commencé à apprendre seul les mathématiques de niveau universitaire à l'âge de 14 ans, alors qu'il était au lycée Heinrich-Hertz, à Berlin. Dans cet établissement, «vous n'étiez pas vu comme un marginal si vous vous intéressiez aux mathématiques», confie-t-il.

BIBLIOGRAPHIE

P. SCHOLZE, Perfectoid spaces, *Publications mathématiques de l'IHÉS*, vol. 116, pp. 245-313, 2012.

J.-M. FONTAINE, Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze), «Séminaire Bourbaki, 64^e année 2011/2012», exposés 1043-1058, vol. 352, *Société mathématique de France*, 2013.

B. BHATT, What is a perfectoid space ?, *Notices AMS*, vol. 61(9), octobre 2014.

À 16 ans, il apprend que dix ans plus tôt, en 1995, Andrew Wiles avait prouvé le fameux dernier théorème de Fermat, selon lequel l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution entière non nulle si n est supérieur à 2 (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68). Peter Scholze se rue sur la preuve, sauf qu'elle fait appel aux mathématiques les plus compliquées. «Je n'y comprenais rien, mais c'était fascinant», dit-il.

Alors il fait marche arrière, essayant de déterminer ce qu'il devait apprendre pour comprendre la preuve de Wiles. «C'est plus ou moins comme ça que j'ai appris jusqu'ici», détaille-t-il. «En fait, je n'ai jamais vraiment appris les choses basiques comme l'algèbre linéaire. Je les ai seulement assimilées en m'intéressant à d'autres notions.»

À mesure qu'il étudiait la preuve de Wiles, Peter Scholze se passionna pour les objets mathématiques utilisés – les formes modulaires et les courbes elliptiques, qui réunissent des domaines disparates de la théorie des nombres, de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse. Comprendre les objets mathématiques en jeu était plus intéressant que le problème lui-même.

Aujourd'hui encore, Peter Scholze travaille sur des problèmes ancrés dans des équations simples impliquant des nombres entiers. De là, même les structures mathématiques les plus ésotériques qui en découlent restent concrètes à ses yeux. «Je m'intéresse surtout à l'arithmétique», explique-t-il. Il se dit très heureux lorsque ses constructions abstraites le conduisent à de petites découvertes sur les nombres entiers.

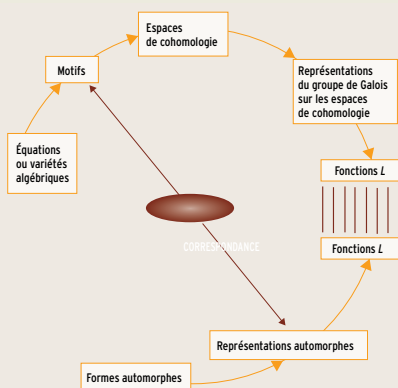
À l'université, Peter Scholze persévère dans la théorie des nombres et la géométrie. Là, son camarade de classe, Eugen Hellmann, se souvient que pendant les cours de mathématiques, Peter ne prenait jamais de notes. Il comprenait le contenu du cours en temps réel. «Mais pas seulement en surface; il comprenait en profondeur, si bien qu'il n'oubliait rien.»

Peter Scholze a commencé ses recherches en géométrie arithmétique, où des outils de géométrie aident à approcher les solutions entières d'équations polynomiales (par exemple, $xy^2 + 3y = 5$), qui n'impliquent que des nombres entiers, des variables et des exposants.

Pour certaines équations de ce type, il est utile de déterminer si elles ont des solutions dans des ensembles de nombres alternatifs dits p -adiques qui, comme les réels, sont construits en «remplissant les intervalles» entre les entiers et les fractions (voir *l'encadré page 88*). Mais ces corps de nombres sont fondés sur des notions non standard d'intervalles et de proximité. Dans un système p -adique, deux nombres sont proches, non pas si leur différence est petite, mais si elle est divisible de nombreuses fois par p (p étant un nombre premier). C'est étrange, mais utile! Ainsi, les nombres 3-adiques offrent un moyen naturel d'étudier

LE PROGRAMME DE LANGLANDS

Une part substantielle des recherches menées ces dernières décennies en théorie des nombres et en géométrie algébrique s'est déroulée sous l'impulsion d'un tissu de conjectures, dont Robert Langlands, de l'Institut des études avancées, à Princeton, aux États-Unis, avait formulé certaines dans une longue lettre adressée à André Weil en 1967. Cet ensemble de conjectures, les unes précises, les autres un peu floues, est surnommé aujourd'hui «programme (ou correspondance) de Langlands». Il dresse des ponts entre la théorie des nombres et d'autres parties des mathématiques, notamment la théorie des représentations des groupes et la théorie de certaines fonctions nommées formes automorphes. Il a été fructueux, dans la mesure où plusieurs résultats importants ont été démontrés au fil des ans: la démonstration du théorème de Fermat, en 1994, en est l'un de ces résultats les plus marquants. Pour autant, l'exploration et la démonstration de cette «correspondance» sont loin d'être achevées: elles représentent toujours, pour les mathématiciens, un défi à relever.



Le programme de Langlands relie deux grands édifices, l'un construit à partir des équations ou variétés algébriques, l'autre à partir de fonctions modulaires ou automorphes. Il conjecture une correspondance entre motifs et représentations automorphes, deux ensembles d'objets auxquels on sait associer des «fonctions L», fonctions qui contiennent des informations de nature arithmétique.

des équations comme $x^2 = 3y^2$, pour lesquelles les multiples de 3 sont la clé.

Les nombres p -adiques vont «bien au-delà de ce que notre sens commun nous permet de concevoir», explique Peter Scholze. Avec les années, ils lui sont finalement devenus naturels. «Désormais, je trouve les nombres réels bien plus perturbants que les p -adiques!»

Les mathématiciens avaient remarqué dans les années 1970 que beaucoup de problèmes concernant les nombres p -adiques deviennent plus simples si on étend le corps des nombres p -adiques en ajoutant successivement les racines p -ièmes de p , créant ainsi une «tour infinie» de nombres, où chacun englobe les précédents, avec les nombres p -adiques à la base. Au «sommet» de cette tour infinie se trouve un objet fractal qui est l'exemple le plus simple des espaces perfectoides que Peter Scholze a développé par la suite.

Il s'est fixé l'objectif de comprendre pourquoi cette construction enveloppante infinie facilite tant les problèmes mettant en jeu des nombres p -adiques et des équations polynomiales. «J'essayais de comprendre le cœur de ce phénomène», explique-t-il. «Il n'existe aucun formalisme général qui peut expliquer cela.»

Il s'est finalement rendu compte qu'il est possible de construire des espaces perfectoides pour une grande variété de structures mathématiques, et notamment pour les corps de nombres p -adiques et les corps de polynômes. Il a montré que ces espaces permettent de transposer des problèmes liés aux équations polynomiales avec les nombres p -adiques dans des structures basées sur des polynômes, où l'arithmétique est bien plus simple (par exemple, lors d'une addition, les retenues ne sont pas nécessaires). «La propriété la plus étrange des espaces perfectoides est leur capacité à se transposer comme par magie entre les deux systèmes», explique Jared Weinstein.

Avec cette idée, Peter Scholze a prouvé un cas particulier d'une conjecture complexe à propos des solutions p -adiques aux équations polynomiales, émise par le mathématicien Pierre Deligne et appelée la conjecture monodromie-poids, qui a fait l'objet de sa thèse en 2012. Elle «avait des implications si vastes qu'elle est devenue un sujet de groupes d'études à travers le monde», selon Jared Weinstein.

Pour Eugen Hellmann, «Peter Scholze a trouvé précisément le moyen le plus propre et le plus correct d'intégrer tous les travaux précédents avec une formulation élégante, et par conséquent le moyen d'aller bien plus loin que les résultats déjà connus».

Malgré la complexité des espaces perfectoides, Peter Scholze est connu pour la clarté de ses discours et de ses publications. «Je ne

comprends vraiment tout cela que lorsque Peter me l'explique», confie Jared Weinstein.

Pour Ana Caraiani, Peter Scholze met un point d'honneur à essayer d'expliquer ses idées à un niveau d'étudiant de second cycle. «Il a cette attitude d'ouverture et de générosité lorsqu'il s'agit de parler de ses idées», explique-t-elle. «Et il ne le fait pas qu'avec quelques seniors. Il est vraiment très accessible pour beaucoup de jeunes.» Cette attitude fait de lui un chef de file idéal pour le domaine, selon Ana Caraiani. Une fois, alors qu'elle participait à une randonnée difficile avec lui et un groupe de mathématiciens, «il était celui qui allait et venait en s'assurant que tous les autres allaient bien et arrivaient à suivre», raconte-t-elle.

AU-DESSUS DE LA JUNGLE

Pourtant, même avec les explications de Peter Scholze, les espaces perfectoides sont difficiles à appréhender pour beaucoup. Selon

Eugen Hellmann, «si vous vous éloignez un petit peu du chemin, vous vous retrouvez au milieu d'une jungle de notions où il est très difficile de se repérer. Peter, en revanche, ne s'y perd jamais. Il n'essaie pas de se frayer un chemin, il est plutôt à la recherche d'une vue globale de l'ensemble, d'un concept plus clair.»

Peter Scholze évite le chaos luxuriant de la jungle de l'arithmétique en la survolant. À l'université, il préférerait travailler sans rien écrire. Ce qui signifie qu'il devait formuler ses idées le plus clairement possible. «Nos capacités cérébrales sont d'une certaine façon limitées, donc on ne peut pas faire de choses trop compliquées», explique Scholze.

Alors que d'autres mathématiciens commencent à s'approprier les espaces perfectoides, certaines des découvertes les plus fondamentales à leur sujet viennent, sans surprise, de Peter Scholze et de ses collaborateurs. En 2013, un résultat publié en ligne «a stupéfié la communauté», d'après Jared Weinstein. «Nous n'imaginions pas qu'un tel théorème soit envisageable.»

Le résultat de Scholze a étendu la portée des relations qu'on appelle lois de réciprocité. Elles gouvernent le comportement d'équations polynomiales qui font appel à l'arithmétique modulaire. Cette arithmétique (dont une illustration simple est le compte «modulo 12» des heures sur une horloge, où 8 heures + 5 heures = 1 heure, par exemple) est le système de nombres finis le plus naturel et le plus étudié.

Les lois de réciprocité sont une généralisation de la loi de réciprocité quadratique, une pierre angulaire de la théorie des nombres démontrée par Gauss en 1801 et l'un des théorèmes préférés de Peter Scholze. La loi de réciprocité quadratique stipule que lorsqu'on a deux nombres premiers p et q , dans la plupart des cas, p est un carré

JE N'AI JAMAIS
VRAIMENT APPRIS
LES CHOSES
BASIQUES.
JE LES AI
ASSIMILÉES EN
M'INTÉRESSANT
À D'AUTRES
NOTIONS