

des équations comme $x^2=3y^2$, pour lesquelles les multiples de 3 sont la clé.

Les nombres p -adiques vont «bien au-delà de ce que notre sens commun nous permet de concevoir», explique Peter Scholze. Avec les années, ils lui sont finalement devenus naturels. «Désormais, je trouve les nombres réels bien plus perturbants que les p -adiques!»

Les mathématiciens avaient remarqué dans les années 1970 que beaucoup de problèmes concernant les nombres p -adiques deviennent plus simples si on étend le corps des nombres p -adiques en ajoutant successivement les racines p -ièmes de p , créant ainsi une «tour infinie» de nombres, où chacun englobe les précédents, avec les nombres p -adiques à la base. Au «sommet» de cette tour infinie se trouve un objet fractal qui est l'exemple le plus simple des espaces perfectoides que Peter Scholze a développé par la suite.

Il s'est fixé l'objectif de comprendre pourquoi cette construction enveloppante infinie facilite tant les problèmes mettant en jeu des nombres p -adiques et des équations polynomiales. «J'essayais de comprendre le cœur de ce phénomène», explique-t-il. «Il n'existe aucun formalisme général qui peut expliquer cela.»

Il s'est finalement rendu compte qu'il est possible de construire des espaces perfectoides pour une grande variété de structures mathématiques, et notamment pour les corps de nombres p -adiques et les corps de polynômes. Il a montré que ces espaces permettent de transposer des problèmes liés aux équations polynomiales avec les nombres p -adiques dans des structures basées sur des polynômes, où l'arithmétique est bien plus simple (par exemple, lors d'une addition, les retenues ne sont pas nécessaires). «La propriété la plus étrange des espaces perfectoides est leur capacité à se transposer comme par magie entre les deux systèmes», explique Jared Weinstein.

Avec cette idée, Peter Scholze a prouvé un cas particulier d'une conjecture complexe à propos des solutions p -adiques aux équations polynomiales, émise par le mathématicien Pierre Deligne et appelée la conjecture monodromie-poids, qui a fait l'objet de sa thèse en 2012. Elle «avait des implications si vastes qu'elle est devenue un sujet de groupes d'études à travers le monde», selon Jared Weinstein.

Pour Eugen Hellmann, «Peter Scholze a trouvé précisément le moyen le plus propre et le plus correct d'intégrer tous les travaux précédents avec une formulation élégante, et par conséquent le moyen d'aller bien plus loin que les résultats déjà connus».

Malgré la complexité des espaces perfectoides, Peter Scholze est connu pour la clarté de ses discours et de ses publications. «Je ne

comprends vraiment tout cela que lorsque Peter me l'explique», confie Jared Weinstein.

Pour Ana Caraiani, Peter Scholze met un point d'honneur à essayer d'expliquer ses idées à un niveau d'étudiant de second cycle. «Il a cette attitude d'ouverture et de générosité lorsqu'il s'agit de parler de ses idées», explique-t-elle. «Et il ne le fait pas qu'avec quelques seniors. Il est vraiment très accessible pour beaucoup de jeunes.» Cette attitude fait de lui un chef de file idéal pour le domaine, selon Ana Caraiani. Une fois, alors qu'elle participait à une randonnée difficile avec lui et un groupe de mathématiciens, «il était celui qui allait et venait en s'assurant que tous les autres allaient bien et arrivaient à suivre», raconte-t-elle.

AU-DESSUS DE LA JUNGLE

Pourtant, même avec les explications de Peter Scholze, les espaces perfectoides sont difficiles à appréhender pour beaucoup. Selon Eugen Hellmann, «si vous vous éloignez un petit peu du chemin, vous vous retrouvez au milieu d'une jungle de notions où il est très difficile de se repérer. Peter, en revanche, ne s'y perd jamais. Il n'essaie pas de se frayer un chemin, il est plutôt à la recherche d'une vue globale de l'ensemble, d'un concept plus clair.»

Peter Scholze évite le chaos luxuriant de la jungle de l'arithmétique en la survolant. À l'université, il préférerait travailler sans rien écrire. Ce qui signifie qu'il devait formuler ses idées le plus clairement possible. «Nos capacités cérébrales sont d'une certaine façon limitées, donc on ne peut pas faire de choses trop compliquées», explique Scholze.

Alors que d'autres mathématiciens commencent à s'approprier les espaces perfectoides, certaines des découvertes les plus fondamentales à leur sujet viennent, sans surprise, de Peter Scholze et de ses collaborateurs. En 2013, un résultat publié en ligne «a stupéfié la communauté», d'après Jared Weinstein. «Nous n'imaginions pas qu'un tel théorème soit envisageable.»

Le résultat de Scholze a étendu la portée des relations qu'on appelle lois de réciprocité. Elles gouvernent le comportement d'équations polynomiales qui font appel à l'arithmétique modulaire. Cette arithmétique (dont une illustration simple est le compte «modulo 12» des heures sur une horloge, où 8 heures + 5 heures = 1 heure, par exemple) est le système de nombres finis le plus naturel et le plus étudié.

Les lois de réciprocité sont une généralisation de la loi de réciprocité quadratique, une pierre angulaire de la théorie des nombres démontrée par Gauss en 1801 et l'un des théorèmes préférés de Peter Scholze. La loi de réciprocité quadratique stipule que lorsqu'on a deux nombres premiers p et q , dans la plupart des cas, p est un carré

JE N'AI JAMAIS VRAIMENT APPRIS LES CHOSES BASIQUES. JE LES AI ASSIMILÉES EN M'INTÉRESSANT À D'AUTRES NOTIONS