

racines dans le fait qu'il ignorait quel genre de mathématicien il était. Contrairement à d'autres, qui travaillent intensément sur un projet et le terminent en quelques mois ou en une année, il s'est rendu compte que ses idées se développaient plus lentement, sur de longues durées. «Je me rendais compte que des idées anciennes revenaient après avoir mûri, parce qu'entre-temps j'avais découvert d'autres notions, explique-t-il. Je ne me serais jamais décrit comme une personne patiente, mais c'est ainsi.»

L'ESSENCE DES CHOSES

N'ayant pas encore eu cette prise de conscience à sa sortie de doctorat en 2002, Akshay Venkatesh avait hâte de faire ses preuves. Une collaboration avec Jordan Ellenberg lui en a alors donné l'opportunité. Ensemble, ils se sont mis à compter les «extensions du corps des nombres», la plus simple étant construite par l'addition aux nombres rationnels d'une poignée de nombres irrationnels satisfaisant certaines équations polynomiales. Ces systèmes de nombres «deviennent un peu irrationnels, mais pas trop», explique Jordan Ellenberg, désormais professeur à l'université du Wisconsin, à Madison.

Il existe une infinité d'extensions du corps des nombres, mais il y a un moyen naturel de mesurer la complexité de chacune d'elles, et

il s'agit alors de compter combien de ces extensions se trouvent en dessous de chaque niveau de complexité. Akshay Venkatesh et Jordan Ellenberg ont déterminé une nouvelle limite supérieure à ces chiffres, laquelle a amélioré considérablement la technique, qui n'avait pas changé depuis des décennies. Selon Akshay Venkatesh, ce projet «était psychologiquement très important». «On s'est attaqué à ce problème par nous-mêmes et nous avons beaucoup progressé.»

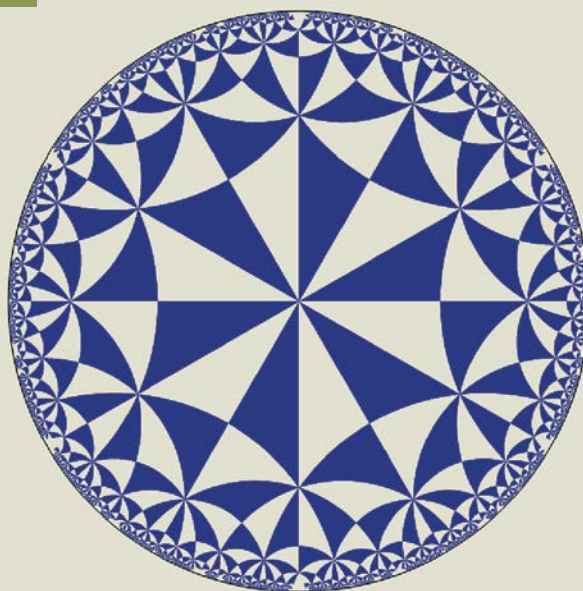
À l'origine, les deux amis se sont intéressés au problème en utilisant de nouveaux outils mathématiques dont ils avaient entendu parler lors d'une conférence. Mais, tandis qu'ils travaillaient à améliorer leur preuve, ils se sont rendu compte qu'ils avaient simplifié tous les nouveaux outils.

«Cela correspond tout à fait à ce que je reconnais aujourd'hui comme étant très caractéristique d'Akshay», explique Jordan Ellenberg. La première version, plus technique, de leur article a permis de prouver leur théorème. Mais pour Akshay Venkatesh, «la question n'est pas tant de savoir si vous avez répondu à la question ou prouvé le théorème. Il s'agit de savoir si on a vraiment compris de quoi il retourne.»

Outre Jordan Ellenberg, de nombreux mathématiciens sont frappés par la capacité d'Akshay Venkatesh à distiller les idées jusqu'à

LA SUBCONVEXITÉ

En 1859, le mathématicien Allemand Bernhard Riemann a défini la fonction *zêta* (une fonction de nombres complexes s de la forme $a + bi$, où $i^2 = -1$) qui s'exprime ainsi : $1/1^s + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s \dots$). Selon lui, tous ces «zéros non triviaux» de cette fonction (les valeurs qui annulent la fonction) sont placés le long d'une droite (une ligne critique) correspondant aux nombres complexes pour lesquels $\sigma = 1/2$. Les fonctions L sont des généralisations de la fonction *zêta* de Riemann où les numérateurs 1 sont remplacés par une séquence de nombres complexes. La subconvexité est liée à la taille de ces fonctions L , plus précisément à la limite supérieure de cette taille le long d'une ligne critique. Akshay Venkatesh explique avoir compris les fonctions L grâce à la géométrie hyperbolique dont un modèle en deux dimensions est le disque de Poincaré (voir la figure ci-contre), sources d'inspiration de l'artiste néerlandais Maurits Cornelis Escher. On observe que la somme des angles des triangles qui pavent le plan est, en géométrie hyperbolique, inférieure à 180° . Akshay Venkatesh étudie ces pavés grâce aux formes automorphes, des versions généralisées de fonctions périodiques, par exemple sinusoïdales. Elles relèvent de l'analyse harmonique où l'on s'intéresse, entre autres, aux... billards parfaits. En s'intéressant à la trajectoire d'une boule sur un billard ayant la forme d'un triangle hyperbolique, on tisse des liens inattendus entre géométrie et théorie des nombres. Ce sont ces liens que Akshay Venkatesh explore.



Le disque de Poincaré est une représentation en deux dimensions de la géométrie hyperbolique. La somme des angles d'un triangle y est inférieure à 180° .

> leur essence. «Lorsqu'il a terminé, sa preuve se retrouve souvent dans tous les manuels», explique Peter Sarnak.

«Il n'est pas rare, en mathématiques, que des personnes viennent m'expliquer la bonne façon de raisonner à propos d'une notion, explique Frank Calegari, de l'université de Chicago. Mais Akshay est l'une des seules personnes à l'avoir fait pour mes propres travaux.»

Peu après ses résultats sur les extensions du corps des nombres, Akshay Venkatesh a obtenu son premier «fait d'armes», le problème de la subconvexité (voir l'encadré page précédente). Il concerne les généralisations de la fonction zêta de Riemann (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68), nommées fonctions L. En 1859, Bernhard Riemann a proposé que les valeurs pour lesquelles une certaine fonction zêta s'annule aideraient à comprendre la répartition des nombres premiers. Mais personne n'est parvenu à le prouver. L'hypothèse de Riemann, qui a des centaines d'implications en dehors de la distribution des nombres premiers, est l'un des problèmes les plus importants en mathématiques.

Chaque fonction L a sa propre version de l'hypothèse de Riemann, toutes aussi difficiles à prouver que la version princeps. Pendant des décennies, les mathématiciens ont donc cherché à les contourner pour prouver directement certaines de leurs conséquences. L'une des plus importantes a trait à la subconvexité, un problème lié à la taille des fonctions L. À la clé, des informations sur les nombres entiers, par exemple sur les façons dont un grand nombre donné peut être écrit sous la forme de la somme de trois carrés parfaits.

Avant que Akshay Venkatesh ne se tourne vers les fonctions L, les solutions de subconvexité relevaient du cas par cas et faisaient souvent l'objet de longs articles techniques, explique Emmanuel Kowalski. Mais en 2004, Akshay Venkatesh a envoyé le premier jet d'un long papier à Philippe Michel, un spécialiste de la subconvexité aujourd'hui à l'École polytechnique fédérale de Lausanne. Dans son article, Akshay Venkatesh utilise des idées issues des systèmes dynamiques pour résoudre le problème de la subconvexité de façon bien plus générale que ce qui avait été accompli auparavant. «La méthode était complètement nouvelle, explique Philippe Michel. Ce fut un choc.»

Akshay Venkatesh et Philippe Michel ont fait équipe à l'occasion d'une seconde publication, basée sur cette nouvelle approche. Les deux papiers, avec d'autres, «ont fait de lui l'un des leaders mondiaux en théorie et en dynamique des nombres», estime Peter Sarnak.

Collaborer avec Akshay Venkatesh pourrait paraître intimidant, étant donné sa grande connaissance et la profondeur de ses idées. Ce

n'est pas le cas. «Il est très fort techniquement, mais on n'est pas écrasé en discutant avec lui, déclare Yiannis Sakellaridis, de l'Université Rutgers, à Newark. On parle simplement de l'essence des choses.»

Lorsque j'ai rencontré Akshay Venkatesh, nous nous sommes promenés de son bureau jusqu'au jardin d'enfants de l'institut pour récupérer sa plus jeune fille, Tuli, puis nous nous sommes rendus à leur appartement. Tara, l'aînée, nous a rejoints peu après. Il était seul à la maison, car sa femme, Sarah Paden, qui termine sa thèse en musicologie à l'université de Princeton, était à une réunion.

Akshay Venkatesh est toujours un grand lecteur. Ces temps-ci, il relit *Guerre et Paix*. L'écriture est aussi exceptionnelle que dans son souvenir, mais elle «est parsemée de passages didactiques que je trouve plus ennuyeux maintenant», dit-il.

DU CAFÉ, MAIS PAS TROP

Sarah Paden décrit son mari comme quelqu'un de casanier: «La routine, les habitudes et son foyer sont des réconforts pour lui». Ils lui offrent la liberté dont il a besoin, estime-t-elle, pour être plus audacieux dans le monde des mathématiques. «J'ai le sentiment qu'il n'est pas le même dans son travail qu'à la maison.»

La simplicité de la vie à Princeton en fait un environnement idéal pour Akshay Venkatesh. Il y a du café – l'un de ses petits plaisirs – au bout du couloir et à la cafétéria. Cependant, il s'astreint à ne pas en abuser. Son bureau dispose d'un luxe rare: un deuxième tableau noir, couvert de pense-bêtes («visa pour le Brésil», «chapitre XIII») et de formules mathématiques.

Akshay Venkatesh est à la fois surpris d'avoir remporté la médaille Fields et anxieux quant à l'exposition subite de sa carrière qu'elle implique. Étudiant, il s'était penché sur les travaux de nombreux lauréats qui l'ont précédé, se rappelle-t-il. «C'est difficile d'imaginer que j'en fais désormais partie.» Il ne sait pas quoi penser des prix en général, puisqu'ils contribuent à renforcer le mythe du génie solitaire. «Et j'en ai sûrement reçu plus que nécessaire», estime-t-il.

Il était particulièrement surpris de remporter la médaille Fields parce qu'une grande partie de ses travaux récents ne sont que des conjectures. Or la récompense est habituellement décernée à des personnes qui ont résolu de grands problèmes. «Mon travail n'est pas de cette nature», explique-t-il.

Ce sont ses travaux récents et hautement spéculatifs qui le rendent le plus heureux. Ils concernent le programme de Langlands, un vaste réseau de connexions entre théorie des nombres, géométrie et analyse. Au cœur de ce programme se trouve un lien – encore flou – entre des formes qui apparaissent dans deux contextes différents. D'un côté, on trouve

BIBLIOGRAPHIE

P. SCHOLZE, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, *Annals of Mathematics*, vol. 182, pp. 945-1066, 2015.

A. VENKATESH, *Sparse equidistribution problems, period bounds and subconvexity*, *Annals of Mathematics*, vol. 172, pp. 989-1094, 2010.

P. MICHEL ET A. VENKATESH, *The subconvexity problem for GL_2* , *Publications mathématiques de l'IHÉS*, vol. 111, pp. 171-271, 2010.