

> leur essence. «Lorsqu'il a terminé, sa preuve se retrouve souvent dans tous les manuels», explique Peter Sarnak.

«Il n'est pas rare, en mathématiques, que des personnes viennent m'expliquer la bonne façon de raisonner à propos d'une notion, explique Frank Calegari, de l'université de Chicago. Mais Akshay est l'une des seules personnes à l'avoir fait pour mes propres travaux.»

Peu après ses résultats sur les extensions du corps des nombres, Akshay Venkatesh a obtenu son premier «fait d'armes», le problème de la subconvexité (voir l'encadré page précédente). Il concerne les généralisations de la fonction zêta de Riemann (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68), nommées fonctions L. En 1859, Bernhard Riemann a proposé que les valeurs pour lesquelles une certaine fonction zêta s'annule aideraient à comprendre la répartition des nombres premiers. Mais personne n'est parvenu à le prouver. L'hypothèse de Riemann, qui a des centaines d'implications en dehors de la distribution des nombres premiers, est l'un des problèmes les plus importants en mathématiques.

Chaque fonction L a sa propre version de l'hypothèse de Riemann, toutes aussi difficiles à prouver que la version princeps. Pendant des décennies, les mathématiciens ont donc cherché à les contourner pour prouver directement certaines de leurs conséquences. L'une des plus importantes a trait à la subconvexité, un problème lié à la taille des fonctions L. À la clé, des informations sur les nombres entiers, par exemple sur les façons dont un grand nombre donné peut être écrit sous la forme de la somme de trois carrés parfaits.

Avant que Akshay Venkatesh ne se tourne vers les fonctions L, les solutions de subconvexité relevaient du cas par cas et faisaient souvent l'objet de longs articles techniques, explique Emmanuel Kowalski. Mais en 2004, Akshay Venkatesh a envoyé le premier jet d'un long papier à Philippe Michel, un spécialiste de la subconvexité aujourd'hui à l'École polytechnique fédérale de Lausanne. Dans son article, Akshay Venkatesh utilise des idées issues des systèmes dynamiques pour résoudre le problème de la subconvexité de façon bien plus générale que ce qui avait été accompli auparavant. «La méthode était complètement nouvelle, explique Philippe Michel. Ce fut un choc.»

Akshay Venkatesh et Philippe Michel ont fait équipe à l'occasion d'une seconde publication, basée sur cette nouvelle approche. Les deux papiers, avec d'autres, «ont fait de lui l'un des leaders mondiaux en théorie et en dynamique des nombres», estime Peter Sarnak.

Collaborer avec Akshay Venkatesh pourrait paraître intimidant, étant donné sa grande connaissance et la profondeur de ses idées. Ce

n'est pas le cas. «Il est très fort techniquement, mais on n'est pas écrasé en discutant avec lui, déclare Yiannis Sakellaridis, de l'Université Rutgers, à Newark. On parle simplement de l'essence des choses.»

Lorsque j'ai rencontré Akshay Venkatesh, nous nous sommes promenés de son bureau jusqu'au jardin d'enfants de l'institut pour récupérer sa plus jeune fille, Tuli, puis nous nous sommes rendus à leur appartement. Tara, l'aînée, nous a rejoints peu après. Il était seul à la maison, car sa femme, Sarah Paden, qui termine sa thèse en musicologie à l'université de Princeton, était à une réunion.

Akshay Venkatesh est toujours un grand lecteur. Ces temps-ci, il relit *Guerre et Paix*. L'écriture est aussi exceptionnelle que dans son souvenir, mais elle «est parsemée de passages didactiques que je trouve plus ennuyeux maintenant», dit-il.

DU CAFÉ, MAIS PAS TROP

Sarah Paden décrit son mari comme quelqu'un de casanier: «La routine, les habitudes et son foyer sont des réconforts pour lui». Ils lui offrent la liberté dont il a besoin, estime-t-elle, pour être plus audacieux dans le monde des mathématiques. «J'ai le sentiment qu'il n'est pas le même dans son travail qu'à la maison.»

La simplicité de la vie à Princeton en fait un environnement idéal pour Akshay Venkatesh. Il y a du café – l'un de ses petits plaisirs – au bout du couloir et à la cafétéria. Cependant, il s'astreint à ne pas en abuser. Son bureau dispose d'un luxe rare: un deuxième tableau noir, couvert de pense-bêtes («visa pour le Brésil», «chapitre XIII») et de formules mathématiques.

Akshay Venkatesh est à la fois surpris d'avoir remporté la médaille Fields et anxieux quant à l'exposition subite de sa carrière qu'elle implique. Étudiant, il s'était penché sur les travaux de nombreux lauréats qui l'ont précédé, se rappelle-t-il. «C'est difficile d'imaginer que j'en fais désormais partie.» Il ne sait pas quoi penser des prix en général, puisqu'ils contribuent à renforcer le mythe du génie solitaire. «Et j'en ai sûrement reçu plus que nécessaire», estime-t-il.

Il était particulièrement surpris de remporter la médaille Fields parce qu'une grande partie de ses travaux récents ne sont que des conjectures. Or la récompense est habituellement décernée à des personnes qui ont résolu de grands problèmes. «Mon travail n'est pas de cette nature», explique-t-il.

Ce sont ses travaux récents et hautement spéculatifs qui le rendent le plus heureux. Ils concernent le programme de Langlands, un vaste réseau de connexions entre théorie des nombres, géométrie et analyse. Au cœur de ce programme se trouve un lien – encore flou – entre des formes qui apparaissent dans deux contextes différents. D'un côté, on trouve

BIBLIOGRAPHIE

P. SCHOLZE, *On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties*, *Annals of Mathematics*, vol. 182, pp. 945-1066, 2015.

A. VENKATESH, *Sparse equidistribution problems, period bounds and subconvexity*, *Annals of Mathematics*, vol. 172, pp. 989-1094, 2010.

P. MICHEL ET A. VENKATESH, *The subconvexity problem for GL_2* , *Publications mathématiques de l'IHÉS*, vol. 111, pp. 171-271, 2010.



© Sasha Maslov/Quanta magazine

des « motifs », des formes reliées aux ensembles de solutions des équations polynomiales (de la même façon qu'un cercle représente les solutions à l'équation $x^2 + y^2 = 1$).

Akshay Venkatesh, dans le parc de l'Institut d'études avancées, à Princeton, avec un café, son pêché mignon.

PAVÉS ET TORSION

De l'autre, des formes obtenues par le collage des côtés d'un « pavé », comme le tore l'est à partir d'un carré. Cependant, les « pavés » requis par le programme de Langlands sont moins simples et évoquent plus les compositions d'Escher. L'une des correspondances de ce type est au cœur de la preuve du dernier théorème de Fermat, fournie en 1994 par Andrew Wiles (voir *Le tombeur de Fermat*, par G. Giorello, page 98).

Parfois, les pavés collés ont subi une torsion indétectable par les méthodes classiques du programme de Langlands. Quand Akshay Venkatesh entend parler de cette torsion, il est « convaincu qu'il y a quelque chose d'important à découvrir ». En 2009, Akshay Venkatesh et Nicolas Bergeron de l'université Pierre-et-Marie-Curie, à Paris, ont montré que la torsion est fréquente dans les pavés collés prévus dans les correspondances de Langlands.

Étonnamment, un des principaux résultats de Peter Scholze, autre médaillé Fields de la même « promotion » que Akshay Venkatesh (voir *L'oracle de l'arithmétique*, par E. Klarreich, page 84), a été de montrer que des classes de telles torsions sont justement associées à des « motifs », au sens décrit précédemment.

Ces dernières années, avec des collègues, Akshay Venkatesh a exploré d'autres caractéristiques de ces torsions, « mathématiquement plus profondes, mais moins visibles ». « Le programme de Langlands fourni une sorte de dictionnaire pour passer d'un objet à l'autre, déclare Frank Calegari. Akshay nous dit qu'il y a quelque chose d'encore plus précis. » Pour le moment, Akshay Venkatesh n'a prouvé qu'une infime partie de ses conjectures globales. « Mais au moins j'arrive à mieux voir ce qui devrait être vrai », dit-il.

Ce genre d'investigation, qui s'apparente à l'exploration d'un paysage flou, constitue ce qui lui convient le mieux. Plus tôt dans sa carrière, lorsqu'il ressentait le besoin d'impressionner les autres, il travaillait sur des problèmes déjà balisés, le laissant en partie insatisfait. Il a depuis découvert la sensation d'être sur la piste de « quelque chose d'intéressant qui n'a pas encore été exploré, ou quelque chose d'anormal qui n'a pas beaucoup de sens ».

À Princeton, Akshay Venkatesh et Yiannis Sakellaridis ont travaillé sur deux problématiques distinctes : l'une concernant les fonctions L et l'autre étant une extension des travaux récents d'Akshay Venkatesh sur le programme de Langlands. Étrangement, ces deux thèmes semblent converger vers une même question. « C'est un très bon signe estime-t-il. Je ne sais pas exactement où cela va nous mener. Mais quelque chose nous attend au bout de ce chemin, c'est certain. » À suivre donc! ■

CÉDRIC
VILLANI

© Marie-Lan Nguyen / Wikimedia Commons / CC-BY 3.0

« Il y a un roman derrière le grand théorème de Fermat »

Pourquoi l'énoncé de Fermat, qui est simple et anodin en apparence, a-t-il acquis une telle célébrité ?

Cédric Villani : Il y a tout d'abord le contraste entre le côté élémentaire de cet énoncé du XVII^e siècle et la difficulté extrême de sa preuve que moi-même, par exemple, serais incapable de comprendre en détail sans avoir fait trois ou quatre années d'études préalables. L'énoncé de Fermat (quel que soit l'entier n supérieur à 2, il n'existe pas d'entiers positifs a , b et c tels que $a^n + b^n = c^n$) a attiré une multitude de mathématiciens amateurs, qui rêvaient de pouvoir entrer dans l'histoire en trouvant, un peu sur un coup de chance, une preuve. C'est encore le cas aujourd'hui, avec des gens persuadés qu'il existe une démonstration beaucoup plus simple que celle d'Andrew Wiles. Et au fil des siècles, plusieurs mathématiciens éminents ont, au détour de

BIO EXPRESS

1973

Naissance à Brive-la-Gaillarde, en Corrèze.

2009

Directeur de l'institut Henri-Poincaré.

2010

Lauréat de la médaille Fields.

2017

Député (LREM) de l'Essonne.

leurs travaux, prouvé le théorème de Fermat pour des valeurs particulières de l'exposant n . Un autre élément d'attrait est l'anecdote historique avec, en particulier, l'erreur ou le bluff de Fermat qui, dans la marge d'un livre, a écrit avoir découvert une démonstration merveilleuse, mais trop longue pour figurer dans cette marge. Il y a un roman derrière le grand théorème de Fermat, et il est haut en couleur !

Le « grand théorème de Fermat » est-il important pour la théorie des nombres ?

Cédric Villani : En soi, non. Ce théorème a ici et là quelques conséquences, mais les méthodes développées pour le démontrer sont de loin plus importantes