

que le résultat lui-même. Et c'est une histoire qui a été pleine de rebondissements au cours des dernières décennies.

Dans les années 1980, Andrew Wiles, qui était fasciné depuis son enfance par la conjecture de Fermat, a compris que certains développements dans le domaine où il faisait ses recherches (la géométrie algébrique) lui permettraient peut-être d'élaborer une démonstration. Il a alors travaillé en secret durant des années, avant d'annoncer lors d'un séminaire en 1993 y être parvenu. Mais sa preuve comportait une erreur, et il a fallu l'aide de son ancien étudiant Richard Taylor pour la réviser et l'achever en 1995, dans une course de vitesse pour ne pas se faire doubler par quelqu'un d'autre.

Les méthodes mobilisées pour ce théorème continuent d'ailleurs de bouger, afin de réécrire la preuve et mieux relier l'énoncé de Fermat à d'autres sujets. Tout cela touche des domaines parmi les plus prestigieux des mathématiques, ceux qui font le plus rêver – la théorie des nombres, la géométrie algébrique, champs où l'activité est intense et où l'école française a d'ailleurs une forte expertise.

Pouvez-vous donner une idée de la démarche suivie par Andrew Wiles ?

Cédric Villani : Depuis 1986, on savait, à la suite de divers travaux, que la conjecture de Fermat pouvait être vue comme un cas particulier d'un énoncé plus vaste et plus technique, la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil. Cette «conjecture STW», datant des années 1960, prédisait une sorte de dictionnaire, de correspondance, entre les «courbes elliptiques» – des courbes (qui ne sont pas des ellipses...) définies par des équations algébriques du troisième degré à coefficients entiers, et dont on ne considère que les points à coordonnées rationnelles – et des fonctions particulières, les «fonctions modulaires». Or on peut associer une certaine courbe elliptique à l'équation de Fermat et on a montré que si cette équation avait des solutions en nombres entiers, alors la courbe elliptique correspondante ne vérifierait pas la conjecture STW. Par conséquent, si la conjecture STW est vraie, il s'ensuit que l'équation de Fermat n'a pas de solutions en nombres entiers et le grand théorème de Fermat serait ainsi prouvé. Andrew Wiles a donc entrepris de démontrer la conjecture STW.

C'est ce qu'il a réussi à faire ?

Cédric Villani : Presque. Andrew Wiles a réussi à démontrer une partie importante de la conjecture STW, qui suffisait à prouver la conjecture de Fermat. La conjecture STW complète a été démontrée plus tard, en 1999, par Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond et Richard Taylor. Cette conjecture est d'ailleurs une brique d'un édifice plus vaste qu'on appelle le programme ou la correspondance de Langlands.

Andrew Wiles était fasciné depuis son enfance par la conjecture de Fermat. Il a alors travaillé en secret durant des années avant d'annoncer son résultat

De quoi s'agit-il ?

Cédric Villani : C'est un ensemble d'idées et de conjectures complexes qui ont été esquissées à la fin des années 1960 par le mathématicien canadien Robert Langlands. Ce programme établit des ponts, ou des correspondances, entre la théorie des nombres et d'autres parties des mathématiques (géométrie algébrique, théorie des groupes, etc.). Il continue à occuper aujourd'hui de nombreux chercheurs brillants, parmi lesquels Laurent Lafforgue (médaille Fields en 2002), Christophe Breuil, Ngô Bao Châu (médaille Fields en 2010)...

Est-il fréquent que la preuve d'un énoncé élémentaire comme celui de Fermat nécessite des mathématiques de très haut niveau ?

Cédric Villani : Oui, j'y ai moi-même été confronté à plusieurs reprises au cours de ma carrière, dans mes travaux sur la stabilité des gaz et des plasmas. Avec mes collègues, nous nous sommes souvent retrouvés avec des preuves plutôt vertigineuses pour des énoncés qui étaient en eux-mêmes peu compliqués. Le cœur de la preuve peut être assez simple, mais c'est l'enrobage technique qui est très élaboré. Ce qu'on préfère, c'est quand l'idée centrale est à la fois simple et inattendue ; mais ce n'est pas toujours le cas ! ■

Propos recueillis par Maurice Mashaal

A full-page portrait of Andrew Wiles, an elderly man with glasses, wearing a grey tweed jacket over a red V-neck sweater and a patterned tie. He is standing outdoors in front of a modern building with large glass windows. The background is slightly blurred.

Le tombeur de Fermat

Le dernier théorème de Fermat ne fut démontré qu'en 1995, par Andrew Wiles, plus de 360 ans après sa première formulation. Une épopée riche en rebondissements et en détours.

L'ESSENTIEL

● Dans les années 1630, Pierre de Fermat affirma: « Soit n un entier supérieur ou égal à 3. L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions entières non nulles. »

● Plusieurs mathématiciens ont progressé vers la démonstration, parfois au prix de gros efforts intellectuels, mais la preuve définitive n'arriva qu'en 1995.

● Elle passe par des avancées récentes en géométrie arithmétique et notamment dans l'étude des courbes elliptiques et la démonstration de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil.

● Le résultat est important, tant par les méthodes employées, les théories déployées que par les questions soulevées.

LES AUTEURS



GIULIO GIORELLO et CORRADO SINIGAGLIA sont professeurs à l'université de Milan, en Italie.



Andrew Wiles Building

Mathematical Institute

CCTV operates in this building 

No Smoking 

It is against the law to smoke in these premises

Andrew Wiles devant le bâtiment qui porte désormais son nom, à l'université d'Oxford.

S

tar Trek, Doctor Who, Les Simpsons... ces trois séries ont en commun d'avoir mis à l'honneur lors d'au moins un épisode l'un des plus célèbres théorèmes mathématiques. Quel résultat a-t-il mérité une telle récupération populaire? Le dernier théorème de Fermat, selon lequel $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solution quel que soit $n > 2$. L'énoncé est simple, la démonstration, beaucoup moins.

Tout commence en 1637 quand Pierre de Fermat, magistrat et mathématicien, note dans la marge de son édition des *Arithmétiques*, de Diophante: «Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré: j'en ai découvert une démonstration véritablement

Dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation de Fermat engendre une surface fermée et orientable, caractérisée par son genre, c'est-à-dire le nombre de trous qu'elle possède. Deux surfaces qui présentent le même nombre de trous sont topologiquement équivalentes: elles sont de genre égal. Si deux surfaces ont le même genre, on passe de l'une à l'autre à l'aide d'une succession de transformations continues comme les déformations d'une surface en caoutchouc.

merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.» On peut douter qu'il l'ait vraiment démontré, car ce n'est qu'en 1995 qu'un autre mathématicien, l'anglais Andrew Wiles, a pu en venir à bout à l'aide d'outils mathématiques très complexes. Ce fut l'épilogue d'une longue histoire riche en détours et en rebondissements.

Remontons le cours de l'histoire, et revenons au début du XIX^e siècle. À cette époque, les mathématiciens savent qu'il suffit de prouver le théorème pour les nombres premiers pour qu'il soit valide quel que soit n . Grâce à Ernst Kummer (1810-1893), ils savent en outre que le théorème est vrai pour les nombres premiers p qu'il a qualifiés de «réguliers» (une certaine propriété liée aux racines du polynôme $x^p - 1$ doit être vérifiée), et qu'il suffit donc de le démontrer pour les nombres premiers «irréguliers».

Toutefois, deux problèmes persistent. D'abord, il n'est pas facile de déterminer si un nombre premier est «régulier». Kummer a trouvé un critère permettant de déduire cette caractéristique, mais plus le nombre premier est grand, plus ce critère est lourd à déterminer. Il s'en est toutefois servi pour démontrer le théorème de Fermat pour tous les nombres premiers réguliers inférieurs à 100. Il est en revanche difficile d'aller plus loin à la main.

Ensuite, Kummer espérait qu'une infinité de nombres p étaient réguliers, faisant de ceux qui ne le sont pas des exceptions. Or, en 1915, le mathématicien danois Johan Jensen montre qu'il existe une infinité de nombres irréguliers.

UNE GOUTTE DANS L'OCÉAN

Avec l'avènement de l'informatique, le seuil des nombres premiers réguliers connus croît progressivement: les recherches sur ordinateur montrent que la plupart des nombres premiers inférieurs à un certain seuil sont réguliers et que les exceptions jouissent d'une propriété supplémentaire, une sorte de régularité faible qui fait que le théorème de Fermat s'applique aussi à ces entiers. Cela réduit d'autant le nombre de cas à traiter au-dessous d'un certain seuil pour démontrer la validité du théorème de Fermat sous ce seuil. Ainsi, en 1983, le théorème est vérifié pour n inférieur à 1 million, puis, en 1992, pour n inférieur à 4 millions.

Ces imposants résultats ne sont cependant qu'une goutte dans l'océan infini des nombres, et le problème de la démonstration du théorème dans sa généralité reste entier.

>

