

Réponses et solutions

Réponse 1: $N=8$

Solution. On dira que deux nombres sont *cotassés* lorsque chacun d'eux, ainsi que leur somme, sont coloriés d'une même couleur. En coloriant les nombres de $[1, 8]$ ainsi: $\{1, 2, 4, 8\}$ en rouge et $\{3, 5, 6, 7\}$ en bleu, on vérifie que la somme de deux nombres d'une même couleur n'est jamais de la même couleur. Le nombre cherché est donc au moins égal à 8. En revanche, comme $9=8+1=3+6$, il est illusoire de chercher à «prolonger» ce coloriage à $[1, 9]$ sans avoir de nombres cotassés.

Et cette impossibilité est générale, quel que soit le coloriage en deux couleurs. Démontrons-le.

Prenons un coloriage quelconque des nombres de $[1, 9]$ en deux couleurs. Parmi les cinq nombres $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, au moins trois sont de la même couleur; appelons S cette couleur et a, b et c les trois nombres rangés ainsi: $5 \leq a < b < c \leq 9$. Définissons aussi $b' = c - a$, $c' = b - a$ et $a' = c - b$. On vérifie que b' et c' sont dans l'intervalle $[1, 4]$ et on calcule $b' - c' = (c - a) - (b - a) = c - b$. Si b' est colorié en S alors b' et a sont cotassés. De même pour c' . Sinon, b' et c' ne sont pas coloriés en S et si $a' = b' - c'$ n'est pas, lui non plus, colorié en S alors c' et a' sont cotassés et sinon $a' = b - c$ est colorié en S donc a' et b sont cotassés. Conclusion: Quel que soit le coloriage, dans tous les cas, on a trouvé deux nombres cotassés. Le nombre maximum recherché doit donc être strictement plus petit que 9. Nous avons vu qu'il doit aussi être au moins égal à 8: c'est donc 8. Il s'agit du nombre de Schur faible $WS(2)$ décrits page 38.

Réponse 2: 55

Solution. Appelons R_n le nombre de randonnées allant de 1 à un entier n . La dernière étape avant d'atteindre n , peut être un ajout de 2 provenant de $n-2$ (il y en a R_{n-2}) ou bien un ajout de 1 provenant de $n-1$ (il y en a R_{n-1}) donc $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$. Comme $R_2 = 1$ et $R_3 = 2$, (R_n) est la suite de Fibonacci. Par conséquent, $R_{10} = F_{10} = 55$. Le nombre de randonnées cherché est 55.

Réponse 3: 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 et 384

Solution. Voici une possibilité pour cette liste de dix entiers positifs. Commençons par les deux premiers entiers positifs, 1 et 2. Le nombre suivant sera $1+2=3$, le quatrième sera $1+2+3=6$, le cinquième sera $1+2+3+6=12$. Nous observons que par construction, la somme est maintenant toujours divisible par tous ses termes puisque chaque nouvel élément est le double du précédent. Continuons ce procédé jusqu'à obtenir le dixième élément de la liste, qui sera 384. Ainsi 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384 est une liste recherchée, chaque élément divisant la somme totale, ici 768. D'une façon générale, pour construire une telle liste, il faut la commencer avec un nombre entier positif a et son double $2a$.

Réponse 4: $r=1$

Solution. Écrivons le nombre r sous la forme d'une fraction irréductible $r=a/b$: les nombres a et b sont alors deux entiers naturels premiers entre eux. On a alors $r+1/r = (a^2+b^2)/ab$. Si ce nombre est un entier, le dénominateur ab doit diviser le numérateur a^2+b^2 . Ainsi, a divise a^2+b^2 , donc il doit diviser b^2 . Comme a et b sont premiers entre eux, cela entraîne $a=1$. De manière analogue, on montre que $b=1$. Cela entraîne $r=1$. Comme réciproquement 1 est clairement solution, on voit que $r=1$ est l'unique nombre rationnel positif répondant à la question.

Réponse 5: $(x, y) = (2, 5)$ et $(3, 7)$

Solution. Dès que $x \geq 5$, le dernier chiffre de $x!$ est un 0, donc le dernier chiffre de $x!+3$ est un 3 et celui de $6 \times (x!+3)$ est un 8. Or, le dernier chiffre d'un nombre au carré comme y^2 est 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, donc le dernier chiffre de y^2+5 est 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, mais pas 8. Cela montre que le cas $x \geq 5$ est impossible. Il ne reste qu'à examiner les cas suivants.

Si $x=1$ alors $6 \times (x!+3)$ vaut 24. Comme 19 n'est pas le carré d'un nombre entier, cela ne correspond pas à une solution.

Si $x=2$ alors $6 \times (x!+3)$ vaut 30. Comme $25=5^2$, cela correspond à la solution $(x, y) = (2, 5)$.

Si $x=3$ alors $6 \times (x!+3)$ vaut 54. Comme $49=7^2$, cela correspond à la solution $(x, y) = (3, 7)$.

Si $x=4$ alors $6 \times (x!+3)$ vaut 162. Comme 157 n'est pas le carré d'un nombre entier, cela ne correspond pas à une solution.

Les seules solutions sont donc $(x, y) = (2, 5)$ et $(3, 7)$.

Réponse 6: 32916

Solution. La décomposition en facteurs premiers de 156 est $2^2 \times 3 \times 13$. Donc $32a1b$ doit être divisible par 4, par 3 et par 13. Pour que ce nombre soit divisible par 4, il faut que le nombre formé par ses deux derniers chiffres (en l'occurrence $1b$) soit divisible par 4. On en déduit $b=2$ ou $b=6$.

Si $b=2$, alors pour que le nombre soit divisible par 3, il faut que a soit égal à 1 ou 4 ou 7, car la somme des chiffres du nombre $32a12$ doit être divisible par 3. Cependant, aucun des nombres alors obtenus n'est divisible par 13.

Si $b=6$, alors pour que le nombre soit divisible par 3, il faut que a soit égal à 0 ou 3 ou 6 ou 9. On obtient alors les nombres: 32016, 32316, 32616 et 32916. Le seul divisible par 13 est 32916.

Réponse 7: 18.

Solution. Remarquons d'abord que l'ensemble de nombres cherché contient au maximum huit nombres, tous inférieurs ou égaux à 8. Pour que le produit de ces nombres soit le plus grand possible, il faut que ces nombres soient différents de 1. Ainsi les