

Réponses et solutions

Réponse 1: $N=8$

Solution. On dira que deux nombres sont *cotassés* lorsque chacun d'eux, ainsi que leur somme, sont coloriés d'une même couleur. En coloriant les nombres de $[1, 8]$ ainsi: $\{1, 2, 4, 8\}$ en rouge et $\{3, 5, 6, 7\}$ en bleu, on vérifie que la somme de deux nombres d'une même couleur n'est jamais de la même couleur. Le nombre cherché est donc au moins égal à 8. En revanche, comme $9=8+1=3+6$, il est illusoire de chercher à «prolonger» ce coloriage à $[1, 9]$ sans avoir de nombres cotassés.

Et cette impossibilité est générale, quel que soit le coloriage en deux couleurs. Démontrons-le.

Prenons un coloriage quelconque des nombres de $[1, 9]$ en deux couleurs. Parmi les cinq nombres $\{5, 6, 7, 8, 9\}$, au moins trois sont de la même couleur; appelons S cette couleur et a, b et c les trois nombres rangés ainsi: $5 \leq a < b < c \leq 9$. Définissons aussi $b' = c - a$, $c' = b - a$ et $a' = c - b$. On vérifie que b' et c' sont dans l'intervalle $[1, 4]$ et on calcule $b' - c' = (c - a) - (b - a) = c - b$. Si b' est colorié en S alors b' et a sont cotassés. De même pour c' . Sinon, b' et c' ne sont pas coloriés en S et si $a' = b' - c'$ n'est pas, lui non plus, colorié en S alors c' et a' sont cotassés et sinon $a' = b - c$ est colorié en S donc a' et b sont cotassés. Conclusion: Quel que soit le coloriage, dans tous les cas, on a trouvé deux nombres cotassés. Le nombre maximum recherché doit donc être strictement plus petit que 9. Nous avons vu qu'il doit aussi être au moins égal à 8: c'est donc 8. Il s'agit du nombre de Schur faible $WS(2)$ décrits page 38.

Réponse 2: 55

Solution. Appelons R_n le nombre de randonnées allant de 1 à un entier n . La dernière étape avant d'atteindre n , peut être un ajout de 2 provenant de $n-2$ (il y en a R_{n-2}) ou bien un ajout de 1 provenant de $n-1$ (il y en a R_{n-1}) donc $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$. Comme $R_2 = 1$ et $R_3 = 2$, (R_n) est la suite de Fibonacci. Par conséquent, $R_1 = F_{10} = 55$. Le nombre de randonnées cherché est 55.

Réponse 3: 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 et 384

Solution. Voici une possibilité pour cette liste de dix entiers positifs. Commençons par les deux premiers entiers positifs, 1 et 2. Le nombre suivant sera $1+2=3$, le quatrième sera $1+2+3=6$, le cinquième sera $1+2+3+6=12$. Nous observons que par construction, la somme est maintenant toujours divisible par tous ses termes puisque chaque nouvel élément est le double du précédent.

Continuons ce procédé jusqu'à obtenir le dixième élément de la liste, qui sera 384. Ainsi 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384 est une liste recherchée, chaque élément divisant la somme totale, ici 768. D'une façon générale, pour construire une telle liste, il faut la commencer avec un nombre entier positif a et son double $2a$.

Réponse 4: $r=1$

Solution. Écrivons le nombre r sous la forme d'une fraction irréductible $r=a/b$: les nombres a et b sont alors deux entiers naturels premiers entre eux. On a alors $r+1/r = (a^2+b^2)/ab$. Si ce nombre est un entier, le dénominateur ab doit diviser le numérateur a^2+b^2 . Ainsi, a divise a^2+b^2 , donc il doit diviser b^2 . Comme a et b sont premiers entre eux, cela entraîne $a=1$. De manière analogue, on montre que $b=1$. Cela entraîne $r=1$. Comme réciproquement 1 est clairement solution, on voit que $r=1$ est l'unique nombre rationnel positif répondant à la question.

Réponse 5: $(x, y) = (2, 5)$ et $(3, 7)$

Solution. Dès que $x \geq 5$, le dernier chiffre de $x!$ est un 0, donc le dernier chiffre de $x!+3$ est un 3 et celui de $6 \times (x!+3)$ est un 8. Or, le dernier chiffre d'un nombre au carré comme y^2 est 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, donc le dernier chiffre de y^2+5 est 0, 1, 4, 5, 6 ou 9, mais pas 8. Cela montre que le cas $x \geq 5$ est impossible. Il ne reste qu'à examiner les cas suivants.

Si $x=1$ alors $6 \times (x!+3)$ vaut 24. Comme 19 n'est pas le carré d'un nombre entier, cela ne correspond pas à une solution.

Si $x=2$ alors $6 \times (x!+3)$ vaut 30. Comme $25=5^2$, cela correspond à la solution $(x, y) = (2, 5)$.

Si $x=3$ alors $6 \times (x!+3)$ vaut 54. Comme $49=7^2$, cela correspond à la solution $(x, y) = (3, 7)$.

Si $x=4$ alors $6 \times (x!+3)$ vaut 162. Comme 157 n'est pas le carré d'un nombre entier, cela ne correspond pas à une solution.

Les seules solutions sont donc $(x, y) = (2, 5)$ et $(3, 7)$.

Réponse 6: 32916

Solution. La décomposition en facteurs premiers de 156 est $2^2 \times 3 \times 13$. Donc $32a1b$ doit être divisible par 4, par 3 et par 13. Pour que ce nombre soit divisible par 4, il faut que le nombre formé par ses deux derniers chiffres (en l'occurrence $1b$) soit divisible par 4. On en déduit $b=2$ ou $b=6$.

Si $b=2$, alors pour que le nombre soit divisible par 3, il faut que a soit égal à 1 ou 4 ou 7, car la somme des chiffres du nombre $32a12$ doit être divisible par 3. Cependant, aucun des nombres alors obtenus n'est divisible par 13.

Si $b=6$, alors pour que le nombre soit divisible par 3, il faut que a soit égal à 0 ou 3 ou 6 ou 9. On obtient alors les nombres: 32016, 32316, 32616 et 32916. Le seul divisible par 13 est 32916.

Réponse 7: 18.

Solution. Remarquons d'abord que l'ensemble de nombres cherché contient au maximum huit nombres, tous inférieurs ou égaux à 8. Pour que le produit de ces nombres soit le plus grand possible, il faut que ces nombres soient différents de 1. Ainsi les

différentes possibilités sont: $2+6$; $2+3+3$; $2+2+2+2$; $3+5$; $2+2+4$; $4+4$.

On voit alors que le plus grand produit est $18=2 \times 3 \times 3$.

Réponse 8: 144

Solution. Pour trois nombres a, b, c , si $0 < a < b < c$ et si $c < a+b$ alors il existe un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c . Par l'hypothèse faite sur les a_i et comme les valeurs de a_i sont en ordre croissant, on a: $a_1+a_2 \leq a_3$; $a_2+a_3 \leq a_4$; $a_3+a_4 \leq a_5$... $a_{10}+a_{11} \leq a_{12}$.

En combinant les deux premières inégalités, on obtient:

$$a_1+2a_2 \leq a_4.$$

Puis, en ajoutant la première inégalité, on obtient: $2a_1+3a_2 \leq a_5$.

En sommant ces deux dernières inégalités, on obtient:

$$3a_1+5a_2 \leq a_6.$$

On continue ainsi jusqu'à obtenir le terme a_{12} . Remarquons qu'au fur et à mesure, de la même façon que dans la suite de Fibonacci, le coefficient devant a_1 est obtenu en sommant les deux coefficients précédents. Les coefficients devant a_2 se comportent de la même manière. Ainsi, la dernière inégalité sera: $55a_1+89a_2 \leq a_{12}$. Comme $a_2 \geq a_1$, on a nécessairement $144a_1 \leq a_{12}$ et donc $a_{12}/a_1 \geq 144$. Il est de plus possible d'atteindre cette valeur en considérant la suite de Fibonacci $a_1=a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$, $a_5=5$... $a_{12}=144$. Finalement, la valeur recherchée est 144.

Réponse 9: 25 et 100

Solution. Notons z et w les deux nombres. On a donc:

$$z+w=125=4z+w/4. \text{ Par conséquent:}$$

$$4z+4w=16z+w, 3w=12z, w=4z \text{ et donc } 5z=125.$$

On en déduit $z=25$ et $w=100$.

Réponse 10: 111888

Solution. Notons a ce nombre. On a donc:

$$a=999 \times b = (1000-1)b = 1000b-b.$$

Si le nombre b avait un ou deux chiffres, alors le chiffre des centaines de $1000b-b$ serait un 9. Par conséquent b est constitué d'au moins trois chiffres. D'autre part, b ne peut pas se terminer par 0 puisque si c'était le cas, on pourrait trouver un nombre strictement plus petit et ne contenant pas de 9 (simplement en divisant par 10). De plus, le chiffre des dizaines ne peut pas non plus être 0, car sinon, celui de a serait un 9. Enfin b ne peut pas se terminer par un 1 car sinon a se terminerait par un 9. Ainsi le nombre minimum pour b est 112. Dans ce cas, $a = 999 \times 112 = 111888$ ne contient pas de 9.

Réponse 11: 49500

Solution. À chaque nombre palindrome aba avec ses chiffres $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on associe le palindrome $(10-a)(10-b)(10-a)$. La somme de aba et de $(10-a)(10-b)(10-a)$ est:

$$(100a+10b+a) + (100(10-a) + 10(10-b) + (10-a)),$$

$$\text{soit } 10(100+10+1) = 1110.$$

Il y a $9 \times 9 = 81$ nombres palindromes avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. La somme de ces 81 nombres vaut donc $(81 \times 1110)/2 = 44955$, où l'on divise par deux, car on compte chaque nombre deux fois dans la somme. Il reste à ajouter la somme de tous les nombres palindromes de la forme $a0a$ avec $a \neq 0$: $909+808...+101 = 4545$.

Donc la somme de tous les nombres palindromes à 3 chiffres est $44955+4545=49500$.

Réponse 12: 31

Solution. Au premier abord, on peut penser que p peut prendre beaucoup de valeurs, et donc qu'il y a de nombreuses solutions. L'énoncé de l'énigme laisse pourtant entendre qu'il n'y a qu'une valeur de p premier pour laquelle p^2+8 aussi est premier. La valeur $p=2$ donne $p^2+8=12$ qui n'est pas premier, et la valeur $p=3$ donne $p^2+8=17$ qui est bien premier. Nous allons montrer que pour toute autre valeur de p , le nombre p^2+8 n'est pas premier.

Si p est un nombre premier différent de 3, alors p est de la forme $3n+1$ ou $3n-1$, pour un certain entier n . On va alors écrire $p=3n \pm 1$ et avec cette écriture on calcule:

$$p^2+8 = (3n \pm 1)^2 + 8 = 9n^2 \pm 6n + 9:$$

Ce dernier nombre est toujours divisible par 3 et strictement supérieur à 3, donc il n'est pas premier. Par conséquent, on a nécessairement $p=3$. Ainsi $p^3+4=31$ (qui est premier).

Réponse 13: 18 chiffres

Solution. Notons a le nombre initial dont l'écriture se termine par 2 et b le nombre obtenu en déplaçant ce 2 en premier chiffre. Par hypothèse, $2a=b$ et a se termine par 2, donc b se termine par 4. Donc a se termine par 42 par conséquent b se termine par 84. Alors a se termine par 842 donc b par 684 (ici on ne peut pas dire que b se termine par 1684). En continuant on voit que a se termine par 6842, et donc b par 3684, et de proche en proche on obtient que a se termine par 105263157894736842.

À ce moment, la multiplication par 2 montre que b commence par 105263157894736842 $\times 2 = 210526315789473684$.

Comme ce nombre est obtenu justement en déplaçant le 2 final de a , on voit que ce choix de a fait l'affaire, et que tout autre a doit se terminer ainsi. Enfin le nombre 105263157894736842 a 18 chiffres.

Réponse 14: 2019=113+73+73+13+13

Solution. Il est assez facile d'écrire 2019 comme somme de sept cubes, puisque $2000=10^3+10^3$, et donc:

$$2019=10^3+10^3+2^3+2^3+1^3+1^3+1^3.$$

Par contre pour réaliser 2019 comme somme de cinq cubes, il faut utiliser des nombres plus grands que 10. Puisque $13^3=2197$, on doit nécessairement utiliser un 11^3 ou un 12^3 . Avec 11^3 , on trouve $11^3+7^3+7^3+1^3+1^3=1331+343+343+1+1=2019$.

POUR D'AUTRES ÉNIGMES

A. Rechtman Bulajich,
Calendrier mathématique, Presses universitaires de Grenoble, 2019.



PUG