

différentes possibilités sont: $2+6$; $2+3+3$; $2+2+2+2$; $3+5$; $2+2+4$; $4+4$.

On voit alors que le plus grand produit est $18=2 \times 3 \times 3$.

Réponse 8: 144

Solution. Pour trois nombres a, b, c , si $0 < a < b < c$ et si $c < a+b$ alors il existe un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c . Par l'hypothèse faite sur les a_i et comme les valeurs de a_i sont en ordre croissant, on a: $a_1+a_2 \leq a_3$; $a_2+a_3 \leq a_4$; $a_3+a_4 \leq a_5$... $a_{10}+a_{11} \leq a_{12}$.

En combinant les deux premières inégalités, on obtient:

$$a_1+2a_2 \leq a_4.$$

Puis, en ajoutant la première inégalité, on obtient: $2a_1+3a_2 \leq a_5$.

En sommant ces deux dernières inégalités, on obtient:

$$3a_1+5a_2 \leq a_6.$$

On continue ainsi jusqu'à obtenir le terme a_{12} . Remarquons qu'au fur et à mesure, de la même façon que dans la suite de Fibonacci, le coefficient devant a_1 est obtenu en sommant les deux coefficients précédents. Les coefficients devant a_2 se comportent de la même manière. Ainsi, la dernière inégalité sera: $55a_1+89a_2 \leq a_{12}$. Comme $a_2 \geq a_1$, on a nécessairement $144a_1 \leq a_{12}$ et donc $a_{12}/a_1 \geq 144$. Il est de plus possible d'atteindre cette valeur en considérant la suite de Fibonacci $a_1=a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$, $a_5=5$... $a_{12}=144$. Finalement, la valeur recherchée est 144.

Réponse 9: 25 et 100

Solution. Notons z et w les deux nombres. On a donc:

$$z+w=125=4z+w/4. \text{ Par conséquent:}$$

$$4z+4w=16z+w, 3w=12z, w=4z \text{ et donc } 5z=125.$$

On en déduit $z=25$ et $w=100$.

Réponse 10: 111888

Solution. Notons a ce nombre. On a donc:

$$a=999 \times b = (1000-1)b = 1000b-b.$$

Si le nombre b avait un ou deux chiffres, alors le chiffre des centaines de $1000b-b$ serait un 9. Par conséquent b est constitué d'au moins trois chiffres. D'autre part, b ne peut pas se terminer par 0 puisque si c'était le cas, on pourrait trouver un nombre strictement plus petit et ne contenant pas de 9 (simplement en divisant par 10). De plus, le chiffre des dizaines ne peut pas non plus être 0, car sinon, celui de a serait un 9. Enfin b ne peut pas se terminer par un 1 car sinon a se terminerait par un 9. Ainsi le nombre minimum pour b est 112. Dans ce cas, $a = 999 \times 112 = 111888$ ne contient pas de 9.

Réponse 11: 49500

Solution. À chaque nombre palindrome aba avec ses chiffres $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on associe le palindrome $(10-a)(10-b)(10-a)$. La somme de aba et de $(10-a)(10-b)(10-a)$ est:

$$(100a+10b+a) + (100(10-a) + 10(10-b) + (10-a)),$$

$$\text{soit } 10(100+10+1) = 1110.$$

Il y a $9 \times 9 = 81$ nombres palindromes avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. La somme de ces 81 nombres vaut donc $(81 \times 1110)/2 = 44955$, où l'on divise par deux, car on compte chaque nombre deux fois dans la somme. Il reste à ajouter la somme de tous les nombres palindromes de la forme $a0a$ avec $a \neq 0$: $909+808...+101 = 4545$.

Donc la somme de tous les nombres palindromes à 3 chiffres est $44955+4545=49500$.

Réponse 12: 31

Solution. Au premier abord, on peut penser que p peut prendre beaucoup de valeurs, et donc qu'il y a de nombreuses solutions. L'énoncé de l'énigme laisse pourtant entendre qu'il n'y a qu'une valeur de p premier pour laquelle p^2+8 aussi est premier. La valeur $p=2$ donne $p^2+8=12$ qui n'est pas premier, et la valeur $p=3$ donne $p^2+8=17$ qui est bien premier. Nous allons montrer que pour toute autre valeur de p , le nombre p^2+8 n'est pas premier.

Si p est un nombre premier différent de 3, alors p est de la forme $3n+1$ ou $3n-1$, pour un certain entier n . On va alors écrire $p=3n \pm 1$ et avec cette écriture on calcule:

$$p^2+8 = (3n \pm 1)^2 + 8 = 9n^2 \pm 6n + 9.$$

Ce dernier nombre est toujours divisible par 3 et strictement supérieur à 3, donc il n'est pas premier. Par conséquent, on a nécessairement $p=3$. Ainsi $p^3+4=31$ (qui est premier).

Réponse 13: 18 chiffres

Solution. Notons a le nombre initial dont l'écriture se termine par 2 et b le nombre obtenu en déplaçant ce 2 en premier chiffre. Par hypothèse, $2a=b$ et a se termine par 2, donc b se termine par 4. Donc a se termine par 42 par conséquent b se termine par 84. Alors a se termine par 842 donc b par 684 (ici on ne peut pas dire que b se termine par 1684). En continuant on voit que a se termine par 6842, et donc b par 3684, et de proche en proche on obtient que a se termine par 105263157894736842.

À ce moment, la multiplication par 2 montre que b commence par 105263157894736842 $\times 2 = 210526315789473684$.

Comme ce nombre est obtenu justement en déplaçant le 2 final de a , on voit que ce choix de a fait l'affaire, et que tout autre a doit se terminer ainsi. Enfin le nombre 105263157894736842 a 18 chiffres.

Réponse 14: 2019=113+73+73+13+13

Solution. Il est assez facile d'écrire 2019 comme somme de sept cubes, puisque $2000=10^3+10^3$, et donc:

$$2019=10^3+10^3+2^3+2^3+1^3+1^3+1^3.$$

Par contre pour réaliser 2019 comme somme de cinq cubes, il faut utiliser des nombres plus grands que 10. Puisque $13^3=2197$, on doit nécessairement utiliser un 11^3 ou un 12^3 . Avec 11^3 , on trouve $11^3+7^3+7^3+1^3+1^3=1331+343+343+1+1=2019$.

POUR D'AUTRES ÉNIGMES

A. Rechtman Bulajich,
Calendrier mathématique, Presses universitaires de Grenoble, 2019.



PUG