

différentes possibilités sont: $2+6$; $2+3+3$; $2+2+2+2$; $3+5$; $2+2+4$; $4+4$.

On voit alors que le plus grand produit est $18=2 \times 3 \times 3$.

Réponse 8: 144

Solution. Pour trois nombres a, b, c , si $0 < a < b < c$ et si $c < a+b$ alors il existe un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c . Par l'hypothèse faite sur les a_i et comme les valeurs de a_i sont en ordre croissant, on a: $a_1+a_2 \leq a_3$; $a_2+a_3 \leq a_4$; $a_3+a_4 \leq a_5$... $a_{10}+a_{11} \leq a_{12}$.

En combinant les deux premières inégalités, on obtient:

$$a_1+2a_2 \leq a_4.$$

Puis, en ajoutant la première inégalité, on obtient: $2a_1+3a_2 \leq a_5$.

En sommant ces deux dernières inégalités, on obtient:

$$3a_1+5a_2 \leq a_6.$$

On continue ainsi jusqu'à obtenir le terme a_{12} . Remarquons qu'au fur et à mesure, de la même façon que dans la suite de Fibonacci, le coefficient devant a_1 est obtenu en sommant les deux coefficients précédents. Les coefficients devant a_2 se comportent de la même manière. Ainsi, la dernière inégalité sera: $55a_1+89a_2 \leq a_{12}$. Comme $a_2 \geq a_1$, on a nécessairement $144a_1 \leq a_{12}$ et donc $a_{12}/a_1 \geq 144$. Il est de plus possible d'atteindre cette valeur en considérant la suite de Fibonacci $a_1=a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=3$, $a_5=5$... $a_{12}=144$. Finalement, la valeur recherchée est 144.

Réponse 9: 25 et 100

Solution. Notons z et w les deux nombres. On a donc:

$$z+w=125=4z+w/4. \text{ Par conséquent:}$$

$$4z+4w=16z+w, 3w=12z, w=4z \text{ et donc } 5z=125.$$

On en déduit $z=25$ et $w=100$.

Réponse 10: 111888

Solution. Notons a ce nombre. On a donc:

$$a=999 \times b = (1000-1)b = 1000b-b.$$

Si le nombre b avait un ou deux chiffres, alors le chiffre des centaines de $1000b-b$ serait un 9. Par conséquent b est constitué d'au moins trois chiffres. D'autre part, b ne peut pas se terminer par 0 puisque si c'était le cas, on pourrait trouver un nombre strictement plus petit et ne contenant pas de 9 (simplement en divisant par 10). De plus, le chiffre des dizaines ne peut pas non plus être 0, car sinon, celui de a serait un 9. Enfin b ne peut pas se terminer par un 1 car sinon a se terminerait par un 9. Ainsi le nombre minimum pour b est 112. Dans ce cas, $a = 999 \times 112 = 111888$ ne contient pas de 9.

Réponse 11: 49500

Solution. À chaque nombre palindrome aba avec ses chiffres $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on associe le palindrome $(10-a)(10-b)(10-a)$. La somme de aba et de $(10-a)(10-b)(10-a)$ est:

$$(100a+10b+a) + (100(10-a) + 10(10-b) + (10-a)),$$

$$\text{soit } 10(100+10+1) = 1110.$$

Il y a $9 \times 9 = 81$ nombres palindromes avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. La somme de ces 81 nombres vaut donc $(81 \times 1110)/2 = 44955$, où l'on divise par deux, car on compte chaque nombre deux fois dans la somme. Il reste à ajouter la somme de tous les nombres palindromes de la forme $a0a$ avec $a \neq 0$: $909+808...+101 = 4545$.

Donc la somme de tous les nombres palindromes à 3 chiffres est $44955+4545=49500$.

Réponse 12: 31

Solution. Au premier abord, on peut penser que p peut prendre beaucoup de valeurs, et donc qu'il y a de nombreuses solutions. L'énoncé de l'énigme laisse pourtant entendre qu'il n'y a qu'une valeur de p premier pour laquelle p^2+8 aussi est premier. La valeur $p=2$ donne $p^2+8=12$ qui n'est pas premier, et la valeur $p=3$ donne $p^2+8=17$ qui est bien premier. Nous allons montrer que pour toute autre valeur de p , le nombre p^2+8 n'est pas premier.

Si p est un nombre premier différent de 3, alors p est de la forme $3n+1$ ou $3n-1$, pour un certain entier n . On va alors écrire $p=3n \pm 1$ et avec cette écriture on calcule:

$$p^2+8 = (3n \pm 1)^2 + 8 = 9n^2 \pm 6n + 9.$$

Ce dernier nombre est toujours divisible par 3 et strictement supérieur à 3, donc il n'est pas premier. Par conséquent, on a nécessairement $p=3$. Ainsi $p^3+4=31$ (qui est premier).

Réponse 13: 18 chiffres

Solution. Notons a le nombre initial dont l'écriture se termine par 2 et b le nombre obtenu en déplaçant ce 2 en premier chiffre. Par hypothèse, $2a=b$ et a se termine par 2, donc b se termine par 4. Donc a se termine par 42 par conséquent b se termine par 84. Alors a se termine par 842 donc b par 684 (ici on ne peut pas dire que b se termine par 1684). En continuant on voit que a se termine par 6842, et donc b par 3684, et de proche en proche on obtient que a se termine par 105263157894736842.

À ce moment, la multiplication par 2 montre que b commence par 105263157894736842 $\times 2 = 210526315789473684$.

Comme ce nombre est obtenu justement en déplaçant le 2 final de a , on voit que ce choix de a fait l'affaire, et que tout autre a doit se terminer ainsi. Enfin le nombre 105263157894736842 a 18 chiffres.

Réponse 14: 2019=113+73+73+13+13

Solution. Il est assez facile d'écrire 2019 comme somme de sept cubes, puisque $2000=10^3+10^3$, et donc:

$$2019=10^3+10^3+2^3+2^3+1^3+1^3+1^3.$$

Par contre pour réaliser 2019 comme somme de cinq cubes, il faut utiliser des nombres plus grands que 10. Puisque $13^3=2197$, on doit nécessairement utiliser un 11^3 ou un 12^3 . Avec 11^3 , on trouve $11^3+7^3+7^3+1^3+1^3=1331+343+343+1+1=2019$.

POUR D'AUTRES ÉNIGMES

A. Rechtman Bulajich,
Calendrier mathématique, Presses
universitaires de Grenoble, 2019.



PUG



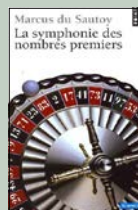
Le Fascinant Nombre π

JEAN-PAUL DELAHAYE

BELIN, 2018

(384 PAGES, 22 EUROS)

Le nombre π est une star incontournable, omniprésente en mathématiques et en physique comme dans la culture populaire. Et c'est à juste titre! On a très tôt cherché à l'approprier. La quadrature du cercle a suscité bien des efforts, même après que l'on a prouvé son impossibilité. Et sur l'océan des décimales de π se défient aujourd'hui d'étranges navigateurs, faisant appel tant à l'informatique qu'aux mathématiques. Ce livre retrace l'histoire de son exploration, en insistant sur les épisodes les plus récents qui nous font percevoir tout le mystère de ce nombre: plus on connaît π , plus il se dérobe.



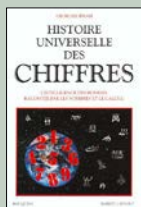
La Symphonie des nombres premiers

MARCUS DU SAUTOY

SEUIL, POINTS SCIENCE, 2007

(496 PAGES, 11,20 EUROS)

Depuis Pythagore et Euclide, une petite musique insistante empêche les mathématiciens de dormir: celle des nombres premiers et de leur étrange distribution dans la suite des nombres «normaux». Pour raconter les péripéties d'une recherche séculaire et expliquer ses enjeux, l'auteur campe les grands héros de l'histoire – Riemann, le «Wagner» des mathématiques, Hilbert, virtuose incomparable, ou Ramanujan, jeune prodige indien –, et explicite également les mille applications potentielles d'une recherche on ne peut plus fondamentale.



Histoire universelle des chiffres (T. 1 & 2)

GEORGES IFRAH

ROBERT LAFFONT, 1994

(1056 ET 1024 PAGES, 28 EUROS PAR TOME)

Des années durant, l'auteur s'est plongé dans une quête aussi folle que celle du Graal pour comprendre d'où venaient les chiffres. De ses recherches, il a tiré un ouvrage exceptionnel, une encyclopédie qui raconte en termes accessibles toute l'histoire des chiffres et apporte de nouvelles lumières, non seulement à l'épopée du calcul (des cailloux à l'ordinateur), mais encore à des domaines aussi éloignés que l'histoire des religions et des mystiques. Outre les Égyptiens, les Babyloniens, les Juifs, les Mayas, on découvre aussi la civilisation indienne à qui l'on doit l'invention capitale de notre zéro.



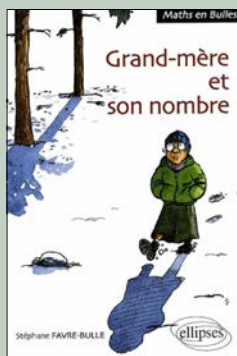
Le Dernier Théorème de Fermat

SIMON SINGH

PLURIEL, 2011

(312 PAGES, 8,10 EUROS)

Pierre Fermat, au XVII^e siècle, s'était contenté d'indiquer dans une marge: « $x^n + y^n = z^n$ impossible si $n > 2$. J'ai trouvé une solution merveilleuse, mais la place me manque pour la développer.» Ce théorème allait devenir la quête ultime du monde mathématique. Les plus puissants esprits de tous les siècles et de toutes les nations tentèrent de venir à bout de cette équation jusqu'à ce que, en 1993, un jeune Anglais, Andrew Wiles, parvienne enfin à la résoudre, devant le regard ébahi de la communauté scientifique. Une épopée qui met en scène les intelligences les plus brillantes.



BANDE DESSINÉE

Grand-mère et son nombre

STÉPHANE FAVRE-BULLE

ELLIPSES, 2008

(96 PAGES, 14,20 EUROS)

Faire défiler dans sa tête les nombres entiers naturels (1, 2, 3, 4...) est un jeu d'enfant! Pourtant, il a fallu des millénaires pour que l'on puisse utiliser et écrire ces nombres d'une manière aussi simple! Et $2/3$ ou -45 ou $3,18$? Et π ? Et $\sqrt{2}$? Sont-ils apparus beaucoup plus tard? Sont-ils si différents? Sont-ils si difficiles à approcher? Lionel ne s'était jamais posé toutes ces questions en arrivant chez sa grand-mère pour le week-end. Mais une mamie mathématicienne aime raconter des histoires parsemées de chiffres... Et elle devient vite passionnante lorsqu'elle parle de son monde fabuleux!