

- > elles valent que l'on s'y intéresse pour le défi, la beauté et même l'amusement.

Certaines méthodes utilisent des procédés physiques (voir l'encadré ci-dessous). La méthode de Monte-Carlo pour calculer  $\pi$  se fonde sur un principe simple: la surface d'un disque de rayon  $r$  est  $\pi r^2$ . On fait tomber au hasard des grains de sable sur un carré de côté  $r$ ; si les grains le recouvrent uniformément, la proportion de grains tombés dans le quart de disque de rayon  $r$  donne une valeur approchée de  $\pi/4$ . On obtient ainsi quelques décimales de  $\pi$  par l'expérience.

### TIRER $\pi$ AU FUSIL

En pratique, cette méthode souffre d'un grave défaut: elle suppose que l'on sache disposer des grains de sable uniformément sur le carré. Or en les lançant vers le centre, par exemple, les grains de sable auront une distribution plus dense vers le centre et plus éparse sur les bords. Le calcul sera faussé!

Des méthodes statistiques corrigent cette non-uniformité. L'une d'elles consiste à compter le nombre de grains  $P$  en affectant à chacun un coefficient inversement proportionnel au nombre de grains situés dans un petit cercle autour de lui. Les grains situés dans une zone

dense sont ainsi moins comptés, ce qui corrige la non-uniformité.

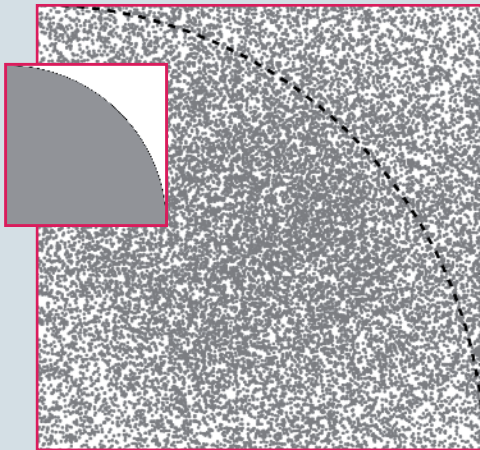
Dans une expérience plus agressive, Vincent Dumoulin et Félix Thouin, de l'université de Montréal, ont utilisé une méthode de ce type en tirant sur une cible distante de 20 mètres avec un fusil. Les expérimentateurs ont ainsi créé 30857 trous dans la cible. Le calcul, avec correction de la non-uniformité, a donné  $\pi = 3,131$ , ce qui correspond à une erreur de 0,3 %.

### DES AIGUILLES ET DES BILLES

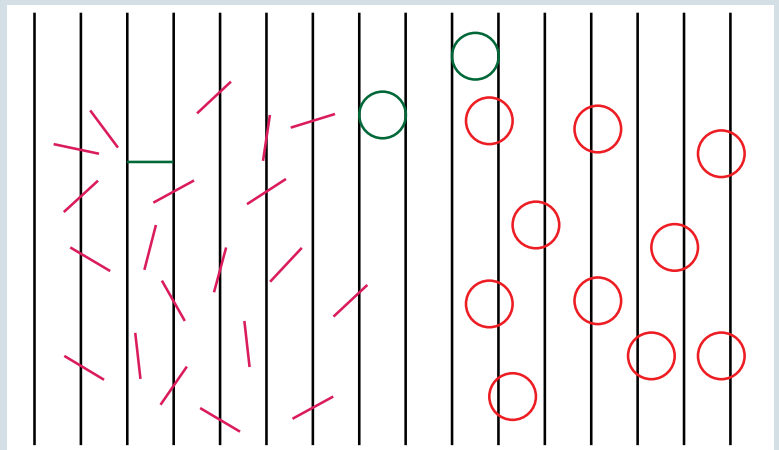
Les aiguilles de Buffon constituent un autre moyen d'approcher  $\pi$  par la physique. On lance  $n$  aiguilles de longueur  $L$  sur un parquet dont la largeur des lattes est  $L$ ; on compte le nombre  $k$  d'aiguilles coupant les lignes parallèles de jonction entre lattes; le quotient  $2n/k$  est une valeur approchée de  $\pi$ . Cette méthode très classique, comme celle des coups de fusil, ne donnera jamais plus de quatre décimales exactes de  $\pi$ .

La méthode proposée par Gregory Galperin, de l'université de l'Illinois, est plus intéressante et surprenante. Elle n'utilise que des chocs entre billes respectant les lois de la physique classique et produisant les décimales de  $\pi$  les unes après les autres. Non seulement le dispositif imaginé

## CALCULER $\pi$ PAR LA PHYSIQUE



En comptant les points ou grains de sable supposés uniformément étalés sur un quart de disque inscrit dans un carré, et en faisant le rapport entre le nombre obtenu et le nombre total de grains de sable dans le carré, on obtient une valeur approchée de  $\pi/4$ . Lorsque les points sont choisis par des méthodes numériques (par exemple des générateurs de nombres pseudo-aléatoires), on parle de méthode de Monte-Carlo. Si la répartition des points n'est pas uniforme, un ajustement statistique est nécessaire.



La méthode du naturaliste Buffon consiste à lancer aléatoirement une aiguille de longueur  $L$  sur un tracé constitué de droites parallèles espacées de la longueur  $L$ : la probabilité de l'intersection d'une aiguille avec une droite est  $2/\pi$ : en lançant beaucoup d'aiguilles et en comptant la proportion d'intersections, on en tire une approximation de  $\pi$ .

Pour comprendre, supposons que, en moyenne, le nombre de points d'intersection d'une courbe quelconque avec les droites soit proportionnel à sa longueur. Pour un cercle de diamètre  $L$ , ce nombre est toujours égal à 2; alors le nombre de points d'intersection pour l'aiguille sera en moyenne  $2L/\pi L = 2/\pi$ .

donne  $\pi$ , mais il le donne écrit en base 10, et cela sans qu'aucun calculateur mécanique ou électronique ne soit mêlé à l'affaire.

Par rapport à celle de Buffon et du fusil, la méthode de Galperin se dispense de hasard : le procédé déterministe donne donc, non pas une approximation de  $\pi$ , mais exactement les premiers chiffres de  $\pi$ ... pour peu que le dispositif matériel soit conforme au modèle théorique.

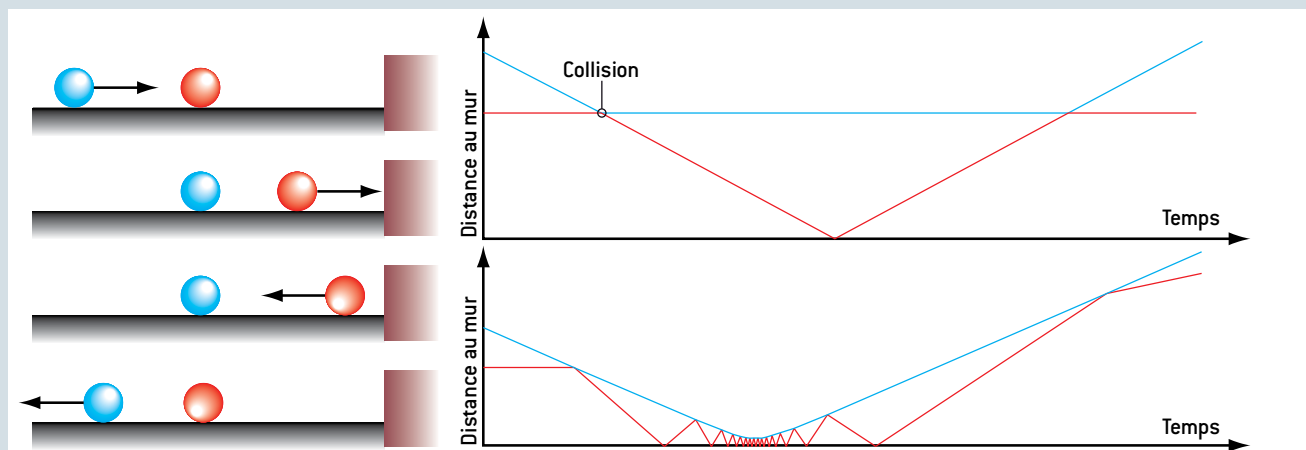
Pour comprendre, commençons par le cas le plus simple (voir l'encadré ci-dessous). On considère deux billes A et B de masse identique (en fait, des masses ponctuelles, la rondeur des billes ne joue aucun rôle). La bille A est immobile à une distance  $L$  d'un mur plat M. On lance la bille B perpendiculairement au mur M dans la direction de A. Elle cogne la bille A de façon parfaitement élastique (conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement). La bille B s'immobilise donc, et A part vers le mur M avec la vitesse qu'avait B et qu'elle lui a transmise. La bille A cogne le mur, rebondit (le choc est toujours parfaitement élastique) et repart vers B, toujours avec la même vitesse. La bille A cogne B, A s'immobilise et B repart en s'éloignant du mur. On suppose qu'il n'y a pas de frottement. Il y a eu trois chocs : deux entre les billes A et B

et un entre la bille A et le mur. Le chiffre 3 est le premier de  $\pi$ . Ce n'est pas un hasard !

Si maintenant on refait l'expérience avec une bille B dont la masse est 100 fois celle de A, le schéma des collisions est plus compliqué. Avant que B et A ne se séparent définitivement, le nombre de chocs entre A et B et de la bille A avec le mur est 31. Ce sont les deux premiers chiffres décimaux de  $\pi$ . Plus généralement, si le rapport des masses entre B et A est  $10^{2n}$ , alors le nombre de chocs donnera exactement les  $n+1$  premiers chiffres décimaux de  $\pi$ . Ainsi, pour un rapport de masse de 10000, il y a 314 chocs ; pour un rapport 1000000, il y a 3141 chocs ; etc.

## UNE BELLE MÉTHODE, MAIS...

Pour les premières valeurs de  $n$ , on peut écrire de petits programmes qui confirment les affirmations indiquées. Le résultat général est cependant démontré de manière parfaitement rigoureuse. Il nécessite juste une petite hypothèse : les  $2n$  premiers chiffres de  $\pi$  ne doivent pas se terminer par  $n-1$  fois le chiffre 9. On sait que c'est vrai pour  $n$  plus petit que 665000000000, puisqu'on connaît explicitement les décimales de  $\pi$ , mais pour  $n$  tendant vers l'infini, nul ne sait le démontrer. Cette ➤



Des chocs entre billes  $\pi$  peut aussi surgir. Prenons une bille bleue et une bille rouge de même masse. La bille rouge est immobile (à gauche). La bille bleue la frappe selon un choc élastique. La bille bleue s'immobilise et la bille rouge se précipite sur un mur où elle rebondit et repart vers la bille bleue. Après le choc, la bille rouge est à nouveau immobile et la bille bleue s'éloigne indéfiniment. Il y a eu 3 chocs (à droite, en haut) : 3 est

le premier chiffre de  $\pi$ . Avec des masses dans un rapport 100, il y a non plus 3, mais 31 chocs (à droite, en bas). Plus généralement, si le rapport des masses est  $100^n$ , alors le nombre de chocs reste fini, et c'est l'entier correspondant aux  $n+1$  premières décimales de  $\pi$ . Ainsi, pour  $n = 5$ , on aura 314 159 chocs : ce sont les 6 premiers chiffres de  $\pi$ .