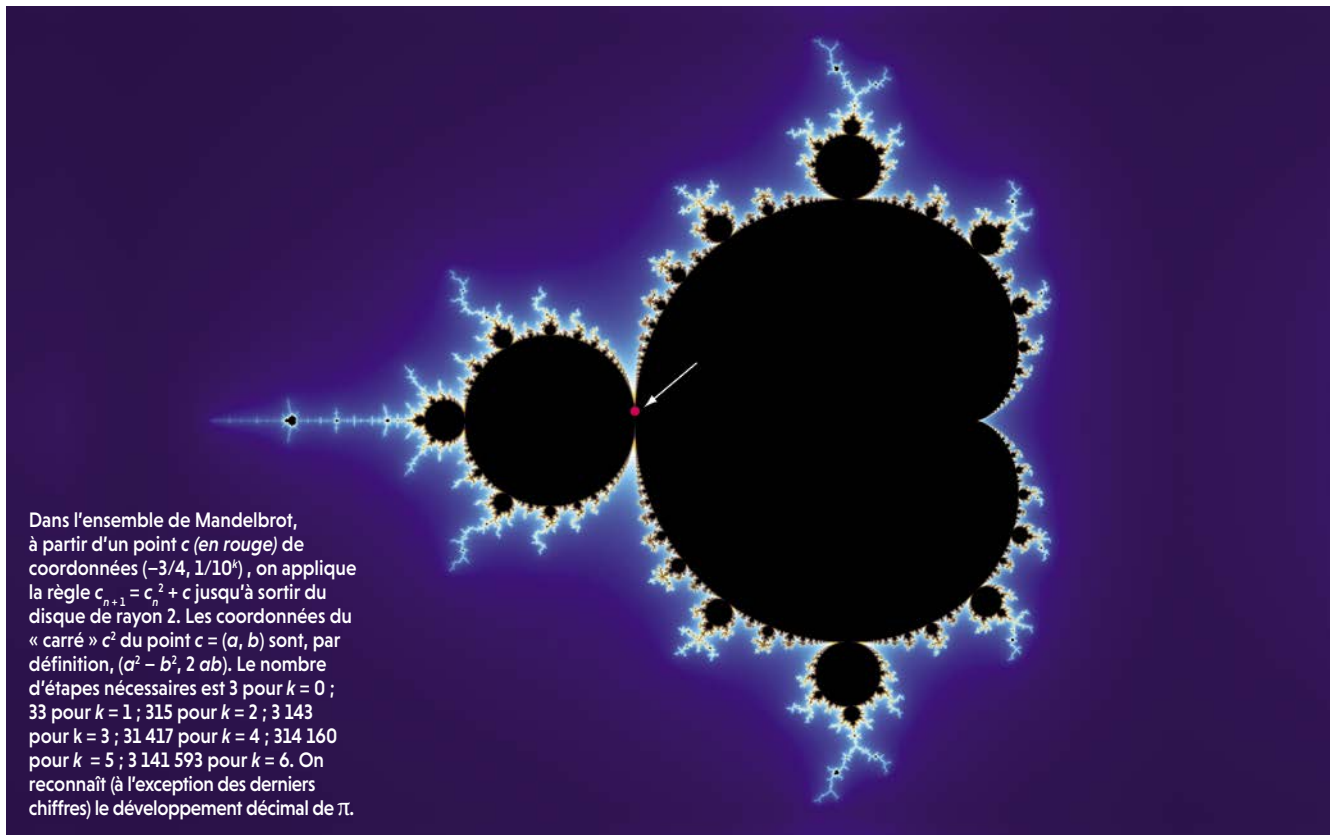




SUR LE WEB

Animation montrant les 31 chocs de deux billes dont le rapport des masses est 100 : <https://youtu.be/4UhPTrHIprk>

Expérience en ligne sur les aiguilles de Buffon : experiences.math.cnrs.fr/Calcul-de-Pi-avec-des-aiguilles-et.html

- propriété est jugée plus que probable, mais elle reste inaccessible à nos techniques de preuve.

La méthode est magnifique et a étonné les spécialistes des systèmes dynamiques. En revanche, sur le plan pratique, la méthode est d'un intérêt limité. Comment ajuster les masses de A et de B avec la précision exigée ? On ne peut espérer faire beaucoup plus que le nombre d'Avogadro, soit environ 10^{24} , ce qui ne donnera que 12 décimales, et les autres mesures sont à l'avenant. Comment être certain de lancer les billes perpendiculairement au mur avec toute l'exactitude nécessaire ? Comment s'assurer que les chocs soient parfaitement élastiques et qu'il n'y ait aucun frottement ?

Pas plus que la méthode de Buffon ou du fusil, on ne tirera de celle de Galperin un grand nombre de chiffres de π . Si l'on veut s'en tenir à des méthodes physiques, le mieux est peut-être simplement de mesurer avec soin le périmètre et le diamètre d'un cercle assez grand et de faire le quotient. En réalité, rien ne vaut les calculs purs ne s'appuyant pas sur des hypothèses et des mesures physiques qu'on ne parvient jamais à mener avec plus de quelques chiffres significatifs. Venons-en donc aux méthodes mathématiques.

Archimède est né, a vécu et est mort à Syracuse, en Sicile. Il fut le premier à proposer une méthode mathématique permettant de calculer les chiffres du nombre π aussi loin qu'on

le souhaite. En mathématiques, Syracuse est aussi le nom d'une conjecture qui intéresse beaucoup de monde à cause de sa simplicité.

J'AIMERAIS TANT VOIR SYRACUSE

Cette «conjecture de Syracuse» ou «conjecture de Collatz» propose de partir d'un entier positif quelconque n : s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le remplace par $3n+1$. Et on recommence. La conjecture affirme que quel que soit l'entier initial n , on finit toujours par arriver à 1 (voir *Élémentaire, mais redoutable*, par S. Eliahou, page 30). Personne n'a su la démontrer. Expérimentalement, elle a été vérifiée jusqu'à 10^{20} . À priori, elle n'a rien à voir avec π , malgré son nom qui semble faire écho à Archimède. La Syracuse de la conjecture est en fait la ville américaine de Syracuse, dans l'État de New York, dont l'université a joué un rôle important dans la diffusion de la conjecture au monde entier.

Aucun lien avec π ? Pourtant, le Français Roland Yéléhada a mis au point une méthode de calcul de π à partir de la conjecture de Syracuse. Le principe est le suivant. On calcule la suite de Syracuse pour tous les nombres jusqu'à une certaine borne n , par exemple 100. Pour chacune des suites calculées, par exemple [13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1], on évalue la longueur, ici 10, et la somme des éléments de la suite, ici 119. On teste si les deux nombres obtenus (10 et 119) ont un

diviseur commun plus grand que 1; ce n'est pas le cas ici. On prend alors le nombre a de fois où la réponse a été NON, puis on divise a par n , ce qui donne un nombre b . La racine carrée c de $6/b$ est une valeur approchée de π !

La méthode ne donne pas très rapidement les chiffres de π , mais on a des raisons de croire qu'elle converge vers π , car la longueur et la somme d'une suite de Syracuse, à cause de comportements imprévisibles des suites, sont comme deux nombres entiers tirés au hasard. Or on sait, d'après un résultat de 1881 démontré par Ernesto Cesaro, que la probabilité que deux entiers tirés au hasard n'aient pas de diviseur commun supérieur à 1 est $6/\pi^2$. Bien qu'aujourd'hui aucune preuve mathématique rigoureuse n'ait été donnée du résultat quand n tend vers l'infini, les expériences effectuées en écrivant de petits programmes confirment qu'il s'agit bien d'une méthode de calcul de π . Pour $n=100$, on obtient $a=66$, $b=0,66$, $c=3,01511...$ Pour $n=1000$, on obtient $a=606$, $b=0,606$, $c=3,146583...$

Bien évidemment, il s'agit d'un jeu et pour disposer de beaucoup de décimales de π , ce procédé n'est pas plus recommandable que les méthodes de Buffon, du fusil ou de Galperin. Une méthode toute aussi étonnante peut-elle faire mieux ? Oui, et elle est plus simple encore à mettre en œuvre.

π CACHÉ DANS UNE FRACTALE

L'ensemble de Mandelbrot est la plus célèbre des fractales (voir la figure page ci-contre). Sa définition, succincte, tient en quelques mots : c'est l'ensemble des points c du plan complexe tels que la suite $c_0=0$, $c_1=c$, $c_2=c_1^2+c$, ..., $c_{n+1}=c_n^2+c$, ... reste dans une partie bornée du plan; autrement dit, c'est l'ensemble des points c tels que la distance de c_n à 0 ne tend pas vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Si vous n'avez jamais entendu parler du «plan complexe», il suffit, pour comprendre

LA PROBABILITÉ QUE DEUX ENTIERS TIRÉS AU HASARD N'AIENT PAS DE DIVISEUR COMMUN SUPÉRIEUR À 1 EST $6/\pi^2$

tout ce qui nous occupe ici, de savoir que le carré d'un point de coordonnées (a, b) (représentant le nombre complexe $c=a+ib$) dans le plan complexe est le point de coordonnées $(a^2-b^2, 2ab)$.

Les outils nécessaires à la visualisation de l'ensemble de Mandelbrot, et surtout les puissances de calcul suffisantes (en chaque point il faut calculer la suite c_n), ne sont devenus disponibles qu'au début des années 1980. Grâce à quoi on a pris conscience de la richesse de cet ensemble et du découpage infiniment fin de sa frontière. Adrien Douady, de l'université Paris-Sud, et John Hubbard, de l'université Cornell aux États-Unis, ont montré en 1981 que cet ensemble est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant : on peut passer d'un point à un autre de l'ensemble en utilisant un chemin qui y reste tout le temps.

En 1991, Dave Boll, étudiant en informatique à l'université d'État du Colorado, explore l'ensemble de Mandelbrot et tente de savoir si un point unique sépare la partie de cet ensemble à droite du point $c = (-3/4, 0)$ de la partie qui se trouve à sa gauche (en rouge sur la figure page ci-contre). Il prend donc des valeurs de c de plus en plus proches du point c et calcule combien de points de la suite il faut considérer avant que c_n sorte du cercle de rayon 2. On sait en effet que dès que la suite c_n sort de ce cercle, elle part inévitablement à l'infini.

Il essaie donc comme point de départ $c=(-3/4, 1)$ et trouve que 3 itérations suffisent pour que la suite sorte du cercle. Il essaie $c=(-3/4, 1/10)$, il en faut maintenant 33. Avec $c=(-3/4, 1/100)$, il en faut 315. Avec $c=(-3/4, 1/1000)$, il en faut 3143. Avec $c=(-3/4, 1/10000)$, il en faut 31417. Avec $c=(-3/4, 1/100000)$, il en faut 314160. Avec $c=(-3/4, 1/1000000)$, il en faut 3141593... Stupéfaction ! Les chiffres des

La naissance de π

Une fantastique configuration des cellules du jeu de la vie a été conçue par Adam Goucher. En respectant la règle unique de fonctionnement « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 voisins vivants », elle calcule π . Bien mieux, elle écrit en diagonale le résultat sous la forme d'une configuration stable qui énumère les chiffres décimaux de π . La configuration initiale est téléchargeable ici : <http://bit.ly/1S7PwJw> Et pour la faire fonctionner, le logiciel gratuit Golly est disponible ici : <http://golly.sourceforge.net>

