

diviseur commun plus grand que 1; ce n'est pas le cas ici. On prend alors le nombre a de fois où la réponse a été NON, puis on divise a par n , ce qui donne un nombre b . La racine carrée c de $6/b$ est une valeur approchée de π !

La méthode ne donne pas très rapidement les chiffres de π , mais on a des raisons de croire qu'elle converge vers π , car la longueur et la somme d'une suite de Syracuse, à cause de comportements imprévisibles des suites, sont comme deux nombres entiers tirés au hasard. Or on sait, d'après un résultat de 1881 démontré par Ernesto Cesaro, que la probabilité que deux entiers tirés au hasard n'aient pas de diviseur commun supérieur à 1 est $6/\pi^2$. Bien qu'aujourd'hui aucune preuve mathématique rigoureuse n'ait été donnée du résultat quand n tend vers l'infini, les expériences effectuées en écrivant de petits programmes confirment qu'il s'agit bien d'une méthode de calcul de π . Pour $n=100$, on obtient $a=66$, $b=0,66$, $c=3,01511...$ Pour $n=1000$, on obtient $a=606$, $b=0,606$, $c=3,146583...$

Bien évidemment, il s'agit d'un jeu et pour disposer de beaucoup de décimales de π , ce procédé n'est pas plus recommandable que les méthodes de Buffon, du fusil ou de Galperin. Une méthode toute aussi étonnante peut-elle faire mieux ? Oui, et elle est plus simple encore à mettre en œuvre.

π CACHÉ DANS UNE FRACTALE

L'ensemble de Mandelbrot est la plus célèbre des fractales (voir la figure page ci-contre). Sa définition, succincte, tient en quelques mots : c'est l'ensemble des points c du plan complexe tels que la suite $c_0=0$, $c_1=c$, $c_2=c_1^2+c$, ..., $c_{n+1}=c_n^2+c$, ... reste dans une partie bornée du plan; autrement dit, c'est l'ensemble des points c tels que la distance de c_n à 0 ne tend pas vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Si vous n'avez jamais entendu parler du « plan complexe », il suffit, pour comprendre

LA PROBABILITÉ QUE DEUX ENTIERS TIRÉS AU HASARD N'AIENT PAS DE DIVISEUR COMMUN SUPÉRIEUR À 1 EST $6/\pi^2$

tout ce qui nous occupe ici, de savoir que le carré d'un point de coordonnées (a, b) (représentant le nombre complexe $c=a+ib$) dans le plan complexe est le point de coordonnées $(a^2-b^2, 2ab)$.

Les outils nécessaires à la visualisation de l'ensemble de Mandelbrot, et surtout les puissances de calcul suffisantes (en chaque point il faut calculer la suite c_n), ne sont devenus disponibles qu'au début des années 1980. Grâce à quoi on a pris conscience de la richesse de cet ensemble et du découpage infiniment fin de sa frontière. Adrien Douady, de l'université Paris-Sud, et John Hubbard, de l'université Cornell aux États-Unis, ont montré en 1981 que cet ensemble est connexe, c'est-à-dire d'un seul tenant : on peut passer d'un point à un autre de l'ensemble en utilisant un chemin qui y reste tout le temps.

En 1991, Dave Boll, étudiant en informatique à l'université d'État du Colorado, explore l'ensemble de Mandelbrot et tente de savoir si un point unique sépare la partie de cet ensemble à droite du point $c = (-3/4, 0)$ de la partie qui se trouve à sa gauche (en rouge sur la figure page ci-contre). Il prend donc des valeurs de c de plus en plus proches du point c et calcule combien de points de la suite il faut considérer avant que c_n sorte du cercle de rayon 2. On sait en effet que dès que la suite c_n sort de ce cercle, elle part inévitablement à l'infini.

Il essaie donc comme point de départ $c=(-3/4, 1)$ et trouve que 3 itérations suffisent pour que la suite sorte du cercle. Il essaie $c=(-3/4, 1/10)$, il en faut maintenant 33. Avec $c=(-3/4, 1/100)$, il en faut 315. Avec $c=(-3/4, 1/1000)$, il en faut 3143. Avec $c=(-3/4, 1/10000)$, il en faut 31417. Avec $c=(-3/4, 1/100000)$, il en faut 314160. Avec $c=(-3/4, 1/1000000)$, il en faut 3141593... Stupéfaction ! Les chiffres des

La naissance de π

Une fantastique configuration des cellules du jeu de la vie a été conçue par Adam Goucher. En respectant la règle unique de fonctionnement « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 voisins vivants », elle calcule π . Bien mieux, elle écrit en diagonale le résultat sous la forme d'une configuration stable qui énumère les chiffres décimaux de π . La configuration initiale est téléchargeable ici : <http://bit.ly/1S7PwJw> Et pour la faire fonctionner, le logiciel gratuit Golly est disponible ici : <http://golly.sourceforge.net>



► nombres calculés sont, à l'exception des derniers, ceux de π écrit en base 10: 314159... Les calculs à programmer pour le vérifier sont particulièrement simples (voir ci-contre).

David Boll découvre aussi que, partant de $(1/4+c, 0)$ et en prenant des valeurs de c de plus en plus petites (cette fois, il commence par $c = 1/100$ et divise par 100 à chaque nouvel essai), on tombe sur les entiers suivants: 30, 312, 3140, 31414, 314157, etc. À nouveau, c'est π !

Notons que rien, dans la définition de l'ensemble de Mandelbrot, n'a de rapport avec la géométrie du cercle. Pourtant, une simple itération partant d'un nombre choisi de plus en plus petit donne assez rapidement les décimales de π .

Notons aussi que, par cette méthode, calculer 20 décimales de π demanderait plus de 10^{20} itérations, ce qui est la limite de ce qu'on peut espérer faire aujourd'hui, même en mobilisant les plus puissants ordinateurs. Cette méthode, aussi simple et élégante qu'elle soit, ne peut donc pas rivaliser avec les meilleures méthodes connues de calcul de π , qui sont plus compliquées, mais beaucoup plus efficaces.

LE JEU DE LA VIE ÉCRIT π

Un exploit de calcul d'une autre nature concernant π est lié au célèbre «jeu de la vie» de John Conway. Ce réseau d'automates cellulaires est l'un des moyens les plus élémentaires de mener des calculs. Chaque case du plan infini, muni d'un quadrillage, est occupée par un microcalculateur confronté à une seule alternative :

– Si, à l'instant t , une case est dans l'état *mort* (de couleur blanche), alors le microcalculateur examine ses 8 voisines; si 3 exactement sont vivantes, la case passe à l'état *vivant* (en noir) à l'instant $t+1$; sinon, elle reste dans l'état *mort*.

– Si, à l'instant t , une case est dans l'état *vivant*, alors le microcalculateur examine ses 8 voisins; si 2 ou 3 sont dans l'état *vivant*, la case reste dans l'état *vivant* à l'instant $t+1$; sinon, elle meurt. En résumé : « Naissance si 3 voisins vivants, survie si 2 ou 3 ».

Le pouvoir de calcul d'un tel réseau est bien supérieur à ce que l'on peut imaginer, et d'ailleurs John Conway a montré qu'on pouvait calculer avec cet automate cellulaire tout ce qui est calculable par algorithme. Pour cela, il faut la bonne configuration initiale et ne pas être pressé !

En 2010, Adam Goucher, prenant au sérieux le résultat théorique de John Conway, a conçu une configuration du jeu de la vie comportant 1389325 cases vivantes. En évoluant génération après génération, la configuration calcule les chiffres de π écrit en base 10 et, c'est le plus étonnant, va les écrire en diagonale à l'aide de cases vivantes déposées qui dessinent les chiffres en écriture habituelle (voir l'encadré page précédente) !

UN PROGRAMME POUR DÉBUSQUER π

Pour chaque entier k à partir de zéro, définissez la suite de couples de nombres réels (a_n, b_n) :
 $a_0 = 0, b_0 = 0,$
 $a_1 = -3/4, b_1 = 1/10^k,$
 $a_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 - 3/4, b_{n+1} = 2a_n b_n + 1/10^k$
 et déterminez le premier n tel que $a_n^2 + b_n^2$ soit supérieur à 4. Les nombres n calculés seront les nombres 3, 33, 315, 3143, 31417, 314160, 3141593...

L'exploit est inouï, mais, une fois encore, c'est un jeu: au bout de plusieurs heures de fonctionnement avec mon ordinateur, la configuration d'Adam Goucher a réussi à écrire 3,14159265. L'obtention d'autres décimales demanderait des jours ou des semaines. Le calcul utilise un produit infini et progresse en $O(n^6)$, ce qui veut dire que s'il faut k heures de calcul pour avoir n décimales, en avoir le double demandera $2^6 = 64$ fois plus de temps, à supposer que la mémoire disponible sur l'ordinateur ne fasse pas défaut.

π NE COULE PAS DE SOURCE !

Pour terminer, signalons deux méthodes illusoires de calcul de π , parfois présentées comme sérieuses, mais qui en réalité ne vous donneront jamais rien.

La première pourrait être qualifiée de géographique. Dans un article publié dans la revue *Science* en mars 1996, Hans-Henrik Stølum, de l'université de Cambridge, décrit un modèle d'écoulement des cours d'eau. Il tire de son modèle l'affirmation qu'en moyenne, le rapport entre la longueur d'un fleuve et la distance à vol d'oiseau entre la source et l'endroit où le fleuve se jette à la mer est le nombre π . En se fondant sur ce résultat, on pourrait donc tenter de calculer π en prenant un grand nombre de fleuves, et en calculant la moyenne des rapports entre leur longueur et la distance parcourue à vol d'oiseau entre la source et l'embouchure.

Malheureusement, tous ceux qui, à partir de bases de données géographiques ont essayé, arrivent à des valeurs sensiblement plus petites que π . Il semble bien que le modèle théorique soit inexact.

L'autre méthode illusoire est celle liée à la théorie économique de Martin Armstrong. Cet Américain est l'auteur d'une théorie (*Economic Confidence Model*) selon laquelle l'économie est soumise à des ondes cycliques tous les 8,6 ans et que les prendre en compte permet de prévoir les crises. La durée de 8,6 ans correspond à 3 141 jours, soit 1000π . On a du mal à comprendre ce que π , avec une précision de 4 chiffres, vient faire dans les cycles économiques, mais Martin Armstrong prétend avoir annoncé, grâce à sa théorie, la crise de 1987 au jour près.

Plus récemment, Martin Armstrong avait annoncé une nouvelle crise pour le 1^{er} octobre 2015. Elle ne s'est pas produite ! Tout cela ne semble pas très sérieux et, si les mathématiciens sont bien persuadés de l'importance et de l'ubiquité de π , ils n'ont pas la naïveté de croire en de telles théories dont, d'ailleurs, aucune justification n'est présentée. C'est un plaisir de jouer avec π et de le découvrir partout, mais c'est avant tout un amusement qu'il est sage de ne pas transformer en superstition numérolgique. ■

BIBLIOGRAPHIE

J.-P. DELAHAYE, *Le fascinant nombre Pi*, Belin, 2^e éd., 2018.

V. DUMOULIN ET F. THOUIN, *A ballistic Monte Carlo approximation of π* , 2014. arxiv.org/pdf/1404.1499.pdf

G. GALPERIN, *Playing pool with π (the number π from a billiard point of view)*, *Regular and Chaotic Dynamics*, vol. 8(4), pp. 375-394, 2003.

A. KLEBANOFF, *π in the Mandelbrot set*, *Fractals*, vol. 9(4), pp. 393-402, 2001.

H.-H. STØLUM, *River meandering as a self-organization process*, *Science*, vol. 271, pp. 1710-1713, 1996.