

4321

Georges Perec a composé un texte palindromique de 1247 mots. Plus récemment, Frédéric Schmitter et Jacques Perry-Salkow ont écrit un récit palindromique, *Sorel Éros*, qui comporte 10001 lettres. Romain Seignovert a trouvé des palindromes pour toutes les langues européennes (voir figure ci-dessous).

Jolis exploits mais qui ne concernent guère le mathématicien. Ce dernier préfère envisager les nombres palindromes. En trouver est facile, puisque toute suite de chiffres ne commençant pas par 0 est un nombre et qu'on peut donc sans difficulté en écrire qui soient des palindromes: 242, 10001 ou 12321. Leur liste, bien sûr infinie, se programme aisément. C'est la suite A002113 de l'encyclopédie en ligne des suites numériques OEIS (<https://oeis.org/A002113>) l'encyclopédie des suites de nombres entiers. En voici le début: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 303, 313, 323, 333, 343...

Les jeux et problèmes que les mathématiciens envisagent à propos des nombres palindromes sont aussi variés et difficiles que ceux d'autres pans de la discipline... et certains restent irrésolus.

COMBIEN SONT-ILS ?

Commençons par des questions faciles. Combien existe-t-il de nombres palindromes en base 10 composés de n chiffres? Si n est pair, pour avoir un nombre palindrome à n chiffres décimaux, il suffit de choisir comme on le veut ses $n/2$ premiers chiffres en imposant que le premier ne soit pas 0, et de les répéter en ordre inverse. Pour $n = 6$, on choisit par exemple 247, qui donne 247742. On en déduit que le nombre de palindromes à n chiffres, n pair, est exactement $9 \times 10^{n/2-1}$, soit 900 pour $n = 6$.

Pour $n = 1$, il y a 10 nombres palindromes: 0, 1..., 9. Si n est impair supérieur à 1, en raisonnant

comme dans le cas pair, on trouve que le nombre de palindromes à n chiffres est $9 \times 10^{(n-1)/2}$. On en tire que le nombre de nombres palindromes inférieurs à 10^n pour $n = 1, 2, 3, 4...$ est, respectivement: 10, 19, 109, 199, 1099, 1999, 10999, 19999... (ce qui est toujours supérieur à $10^{n/2}$).

Leur densité (leur fréquence) devient nulle à l'infini et elle est sensiblement inférieure à celle des nombres premiers, ce que l'on démontre ou que l'on constate en examinant le nombre de nombres premiers inférieurs à 10^n pour $n = 1, 2, 3, 4, ...,$ qui est 4, 25, 168, 1229, >

L'Europe des palindromes. Romain Seignovert, fervent défenseur de l'idée d'une Europe unie, propose cette carte où chaque pays porte un palindrome dans sa langue.



9592, 78498, 664579, 5761455... (en ordre de grandeur: $10^n/n$). La série des inverses des nombres palindromes converge vers la limite 3,37018..., alors que la série des inverses des nombres premiers a une somme infinie, marque d'une densité assez forte.

Autre propriété élémentaire: si un nombre palindrome est formé d'un nombre pair de chiffres, alors il est divisible par 11, et n'est donc pas un nombre premier (sauf 11 lui-même). Pour le démontrer, on applique le critère de divisibilité par 11: «Un entier est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est un multiple de 11» (par exemple, 915123 est un multiple de 11 puisque $(9+5+2) - (1+1+3) = 11$). Pour un nombre palindrome N ayant un nombre pair de chiffres, les deux sommes en question sont égales; leur différence est nulle, donc N est multiple de 11.

Quittons les rivages de la facilité... Qu'en est-il des nombres palindromes ayant un nombre impair de chiffres? Peuvent-ils être des nombres premiers? Plus généralement, qu'en est-il des diviseurs des nombres palindromes?

Voici d'abord le début de la suite des nombres premiers palindromes (<https://oeis.org/A002385>): 2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929, 10301, 10501, 10601, 11311, 11411, 12421, 12721, 12821, 13331, 13831, 13931, 14341... Le plus grand nombre premier palindrome connu aujourd'hui est $10^{474500} + 999 \times 10^{237249} + 1$, qui est formé de 474 501 chiffres.

On cherche à démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers palindromes. Cela semble probable, car les deux propriétés «être un nombre premier» et «être un palindrome», au moins pour les nombres composés d'un nombre impair de chiffres, semblent indépendantes. Cependant, cette intuition un peu vague n'a pas pu être confirmée par une démonstration et donc l'affirmation «Il existe une infinité de nombres premiers palindromes» reste une conjecture.

Il existe des méthodes pour construire des nombres palindromes qui ne sont pas des nombres premiers. En voici une.

$$\begin{aligned} 1 \times 1 &= 1 \\ 11 \times 11 &= 121 \\ 111 \times 111 &= 12321 \\ 1111 \times 1111 &= 1234321 \\ 11111 \times 11111 &= 123454321 \\ 111111 \times 111111 &= 12345654321 \\ 1111111 \times 1111111 &= 1234567654321 \\ 11111111 \times 11111111 &= 123456787654321 \\ 111111111 \times 111111111 &= 12345678987654321 \end{aligned}$$

Malheureusement, la méthode ne fonctionne plus au-delà, car $1111111111 \times 1111111111 = 1234567900987654321$

Le sixième des nombres de cette série est vraisemblablement le premier palindrome à avoir attiré l'attention d'un mathématicien. En effet, il est mentionné par Mahāvīra, un mathématicien indien du IX^e siècle. Dans son ouvrage en sanskrit *Ganita-sāra-sangraha*, il évoque ce carré parfait en le décrivant comme un nombre «commençant par 1 et allant jusqu'à 6, puis décroissant en ordre inverse».

Une série de formules donnent, elles, une infinité de nombres palindromes composés:

$$\begin{aligned} 11 \times 11 \times 11 &= 1331 \\ 11 \times 11 \times 111 &= 13431 \\ 11 \times 11 \times 1111 &= 134431 \\ 11 \times 11 \times 11111 &= 1344431 \\ 11 \times 11 \times 111111 &= 13444431 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ajoutons encore deux séries infinies:

$$\begin{aligned} 11 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 13566 \dots 66531 \\ \text{et } 111 \times 111 \times (11 \dots 11) &= 136899 \dots 9998631 \end{aligned}$$

FACTEURS ET NOMBRES PREMIERS

William Banks a démontré que des nombres palindromes ont un nombre de facteurs premiers aussi grand que souhaité. Des nombres palindromes ont donc, par exemple, plus de 1000 facteurs premiers. Il a aussi établi que des nombres palindromes ont des facteurs premiers aussi longs qu'on le désire; ainsi, des nombres palindromes ont un facteur premier composé de plus de 1 million de chiffres.

Une autre étude, cette fois de William Banks, Derrick Hart et Mayumi Sakata, établit que la proportion d'entiers premiers parmi les

LES NON-PALINDROMES

Les nombres strictement non palindromes sont, par définition, les entiers n qui ne sont pas palindromes dans aucune base b avec $2 \leq b \leq n-2$. On impose la limite $n-2$ car, en base $n-1$, le nombre n s'écrit 11 et est donc toujours palindrome. La suite des nombres strictement non palindromes commence par: 0, 1, 2, 3, 4, 6, 11, 19, 47, 53, 79, 103, 137, 139, 149, 163, 167, 179, 223, 263, 269, 283, 293... qui est la suite A016038 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane. Une propriété intéressante des nombres strictement non palindromes est que ce sont tous des nombres premiers, à l'exception de 4 et 6. En voici la démonstration. On se donne un nombre composé quelconque $n > 6$ et on montre que n est

palindrome dans une base bien choisie.

- Si n est pair, n s'écrit 22 dans la base $b = n/2 - 1$, car $n = 2(n/2 - 1) + 2$.
 - Si n est impair, on écrit $n = pm$, où p est le plus petit facteur premier de n . Nécessairement, $p \leq m$.
 - Si $p = m = 3$, alors $n = 9$ s'écrit 1001 en base $b = 2$.
 - Si $p = m > 3$, alors n s'écrit 121 en base $b = p - 1$, car $121_{p-1} = 1 + 2(p-1) + (p-1)^2 = 1 + 2p - 2 + p^2 - 2p + 1 = p^2 = n$.
 - Le cas $p = m - 1$ est impossible, car p et m sont impairs.
 - Si $p < m - 1$, alors n est le palindrome pp en base $b = m - 1$, car $p(m-1) + p = pm$.
- On contrôle à chaque fois que la base proposée vérifie $2 \leq b \leq n-2$ et que les chiffres du palindrome proposé sont des nombres entiers entre 0 et $b-1$.